

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное агентство по образованию  
Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского

Д.Е. Бурланков

# Динамика ПРОСТРАНСТВА

Нижний Новгород  
Издательство Нижегородского университета  
2005

УДК 530.12; 531.51

ББК Б315.3

Б-90

Рецензент: канд. ф.-м. н., доцент В. А. Муравьев

Д.Е. Бурланков. ДИНАМИКА ПРОСТРАНСТВА

Монография. - Н.Новгород: издательство ННГУ

им. Н.И. Лобачевского 2005. - 179 с.

ISBN 5-85746-281-9

В монографии излагается *теория глобально времени*, являющаяся дальнейшим развитием ОТО, противопоставляемая последней как физическая теория пространства, времени и тяготения. Физическая суть теории: пространство (трехмерное) есть материальный носитель геометрических свойств. Выведены уравнения динамики пространства. Существенным отличием от ОТО является ненулевой гамильтониан, что дает возможность строить квантовую теорию гравитации на основе уравнения Шредингера. Рассмотрены примеры квантового космологического уравнения. Построены решения для космических вихрей, не имеющих аналога в ОТО, обладающих *слабым принципом суперпозиции* и огромной энергией. Описаны модули в системе Mathematica для выполнения расчетов на компьютере.

Для научных работников, преподавателей и студентов вузов.

ББК В185

ISBN 5-85746-281-9

© Бурланков Д. Е., 2005

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>8</b>
<b>1 Римановы пространства</b>	<b>12</b>
1.1 Основы римановой геометрии	12
1.1.1 Общепринятые соглашения	13
1.1.2 Тензоры в римановом пространстве	14
1.1.3 Симметрия тензоров	16
1.1.4 Ковариантное дифференцирование	19
1.1.5 Операторы теории поля	20
1.1.6 Инвариантные интегралы	22
1.1.7 Тензор кривизны	22
1.2 Двумерные поверхности	24
1.2.1 Двумерная сфера	26
1.3 Трехмерные пространства	26
1.3.1 Трехмерная сфера	27
1.3.2 Пространство Лобачевского	29
1.4 Отображения римановых пространств	30
1.5 Геометрия и энергия	31
<b>2 Неинерциальные системы</b>	<b>33</b>
2.1 Вращающаяся система	34
2.2 Ковариантная производная по времени	35
2.3 Ли – вариации	37
2.4 Движения римановых пространств	38
2.4.1 Движения двумерной сферы	39
2.4.2 Трехмерная сфера	40
2.5 Пространство В9	41

<b>3</b>	<b>Теория глобального времени</b>	<b>44</b>
3.1	Время и пространство . . . . .	44
3.2	Физические поля . . . . .	45
3.3	Принцип наименьшего действия . . . . .	46
3.3.1	Электродинамика . . . . .	46
3.4	Динамика пространства . . . . .	48
3.4.1	Действие динамического пространства . . . . .	48
3.4.2	Безразмерная запись . . . . .	50
3.4.3	Динамические уравнения . . . . .	51
3.4.4	Уравнения связи . . . . .	52
3.4.5	Теорема о вироале пространства . . . . .	52
3.4.6	Тождества Гильберта . . . . .	53
3.4.7	Гамильтониан . . . . .	54
3.4.8	Поток энергии . . . . .	55
3.4.9	Гравитационный поток . . . . .	57
3.5	Взаимодействие с вложенной материей . . . . .	59
3.5.1	Электромагнитное поле . . . . .	59
3.5.2	Пылевидная материя . . . . .	61
3.5.3	Идеальная релятивистская жидкость . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Решения</b>	<b>65</b>
4.1	Сферически-симметричные пространства . . . . .	65
4.1.1	Поле сферической массы . . . . .	66
4.1.2	Поле заряженной частицы . . . . .	67
4.1.3	Нестационарное поле скоростей вакуума . . . . .	67
4.2	Космологические задачи . . . . .	68
4.2.1	Динамика плоского мира . . . . .	68
4.2.2	Динамика сферического мира . . . . .	69
4.3	Вихревое поле . . . . .	70
4.3.1	Слабый принцип суперпозиции . . . . .	72
4.3.2	Мультипольные решения . . . . .	73
4.3.3	Поле с кольцевым источником . . . . .	74
4.3.4	Энергия . . . . .	75
4.4	Плоская анизотропная модель . . . . .	76
4.5	Однородное электрическое поле . . . . .	80
4.6	Динамическая модель В9 . . . . .	82
4.6.1	Динамика пространства . . . . .	82
4.6.2	Динамика с однородным электромагнитным полем . . . . .	83

4.7	Плоские гравитационные волны . . . . .	84
<b>5</b>	<b>Динамика в римановом пространстве</b>	<b>87</b>
5.1	Геодезические линии . . . . .	88
5.2	Движение по двумерной сфере . . . . .	90
5.3	Динамика в неинерциальной системе . . . . .	92
5.4	Поля Киллинга и динамика . . . . .	93
5.5	Первый закон Ньютона . . . . .	94
5.6	Равномерное движение трехмерной сферы . . . . .	94
5.7	Нерелятивистское движение . . . . .	96
5.7.1	Движение в поле Бьерна . . . . .	97
5.7.2	Движение в поле вихревого монополя . . . . .	98
5.8	Движение света . . . . .	99
5.8.1	Распространение света вблизи Солнца . . . . .	100
5.8.2	Распространение света в плоской космологической модели . . . . .	102
5.8.3	Космические линзы . . . . .	102
5.9	Релятивистская динамика . . . . .	104
5.9.1	Собственное время движущегося тела . . . . .	104
5.9.2	Движение материальной точки . . . . .	105
5.10	Релятивистское движение в поле Бьерна . . . . .	107
5.10.1	Движение по окружности . . . . .	108
5.10.2	Вращение перигелия Меркурия . . . . .	110
<b>6</b>	<b>Общая теория относительности</b>	<b>111</b>
6.1	Краткая история . . . . .	111
6.2	Вклад Гильберта . . . . .	114
6.3	Основные решения . . . . .	115
6.3.1	Метрика Шварцшильда . . . . .	115
6.3.2	Решение Керра . . . . .	116
6.4	Космология . . . . .	117
6.4.1	Критическая плотность . . . . .	118
6.5	Гравитационные волны . . . . .	119
6.6	ОТО в глобальном времени . . . . .	119
6.6.1	Метрика Шварцшильда в глобальном времени . . . . .	120
6.6.2	Метрика Шварцшильда в глобальной инерциальной системе . . . . .	121
6.6.3	Метрика Керра в глобальном времени . . . . .	122
6.7	Приведение к глобальному времени . . . . .	124

6.8	Техника АДМ . . . . .	125
6.9	ОТО и квантовая теория . . . . .	127
6.9.1	Уравнение Уилера – де Витта . . . . .	127
<b>7</b>	<b>Приближения</b>	<b>129</b>
7.1	Нерелятивистское приближение . . . . .	129
7.2	Приближение плоского пространства . . . . .	130
7.3	Гравитационный потенциал . . . . .	131
7.4	Слабые гравитационные волны . . . . .	131
7.5	Излучение гравитационных волн . . . . .	134
7.5.1	Плоская волна . . . . .	134
7.5.2	Излучение гравитационных волн . . . . .	135
7.5.3	Потеря энергии за счет гравитационного излучения . . . . .	136
7.5.4	Излучение по Эйнштейну и ТГВ . . . . .	139
<b>8</b>	<b>Квантовая теория</b>	<b>140</b>
8.1	Плотность энергии . . . . .	140
8.2	Квантовая модель Большого Взрыва . . . . .	141
8.2.1	Сферическое пространство . . . . .	142
8.2.2	Квантовая модель . . . . .	143
8.3	Плоская анизотропная модель . . . . .	148
8.4	Квантовая теория гравитации . . . . .	150
8.4.1	Функциональное пространство метрик . . . . .	150
<b>9</b>	<b>Проблема начальных данных</b>	<b>152</b>
9.1	l-анализ . . . . .	152
9.2	Гармонические полиномы . . . . .	153
9.3	l-представление . . . . .	154
9.4	Динамика скалярного поля . . . . .	156
9.5	Электродинамика . . . . .	157
9.6	Риманова геометрия . . . . .	158
9.7	Динамика пространства в ТГВ . . . . .	160
9.8	Динамическая структура ОТО . . . . .	161
<b>10</b>	<b>Аналитические вычисления</b>	<b>163</b>
10.1	Риманова геометрия . . . . .	164
10.1.1	Модуль Ricci . . . . .	164

10.1.2	Сферические координаты в евклидовом пространстве . . . . .	166
10.1.3	Трехмерная сфера . . . . .	166
10.1.4	Трехмерная сфера в конформных координатах . . . . .	167
10.1.5	Трехмерная сфера в углах Эйлера . . . . .	168
10.1.6	Пространства отрицательной кривизны . . . . .	169
10.1.7	Двумерные поверхности . . . . .	170
10.2	Работа с векторными полями . . . . .	170
10.3	Теория глобального времени . . . . .	173
10.3.1	Модуль Glob . . . . .	173
10.3.2	Vortex . . . . .	175
	<b>Заключение</b> . . . . .	<b>177</b>
	<b>Литература</b> . . . . .	<b>178</b>

# Введение

Основные физические положения теории пространства и времени:

**Пространство** является материальным носителем геометрических свойств. Оно трехмерно.

**Глобальное время** – это собственное время пространства, единое для всех его точек.

Ньютон полагал пространство неизменным и, хотя явно об этом не говорил – евклидовым. Об евклидовости пространства Ньютона говорит первый закон: свободное тело сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения. Пространство, в котором из любой точки в любом направлении можно провести прямые линии, является евклидовым. Но ни о каком другом пространстве Ньютон не мог вести речи просто потому, что в то время никакой геометрии, кроме геометрии Евклида, просто не знали. Евклидовость пространства, в котором мы живем, была очевидностью в течение двух тысячелетий со времен создания евклидовой геометрии.

Однако, по мере развития геометрии это его свойство стало ставиться под вопрос. В XIX веке возникает дифференциальная геометрия искривленных поверхностей (Гаусс – 1827), затем неевклидова геометрия (Лобачевский – 1829, Бойяи – 1831), затем сферическая геометрия Римана и общая риманова геометрия.

Карл Фридрих Гаусс (1777 – 1855) ввел понятие о *внутренней геометрии* поверхности, не связанной с его вложением в трехмерное пространство, характеризуя поверхность *первой квадратичной формой* – метрикой, определяющей расстояния между бесконечно

близкими точками поверхности и не зависящими от способа вложения ее в трехмерное пространство, и даже допускающую описание двумерной поверхности самой по себе, без какого-либо ее вложения.

Бернгард Риман (1826 – 1866) распространил идеи Гаусса описания свойств пространства с помощью метрики на пространства любого числа измерений, в том числе и трехмерного. И Лобачевский, и Риман уже подвергают ревизии евклидовость нашего реального трехмерного пространства.

В лекции 1854 года “О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии” [1], Риман обсуждает геометрию пространства:

“Мы приходим к заключению, что пространство есть частный случай трижды протяженной величины. Необходимым следствием отсюда явится то, что предложения геометрии не выводятся из общих свойств протяженных величин и что, напротив, те свойства, которые выделяют пространство из других мыслимых трижды протяженных величин, могут быть почерпнуты не иначе, как из опыта. В таком случае возникает задача установить, из каких простейших допущений вытекают метрические свойства пространства ...”

Наиболее далеко продвинулся в представлении трехмерного физического пространства не только как риманова с переменной кривизной, но и с метрикой, меняющейся во времени, Уильям Кингдом Клиффорд (1845 – 1879).

В конце XIX века начался поход за пересмотр свойств пространства. Он шел как со стороны анализа отношения к реальному, физическому пространству, так и в разработке математических методов, позволяющих не только рассуждать об этих свойствах, но и точно их описывать. Огромная заслуга в этом направлении принадлежит создателю *абсолютного дифференциального исчисления* Грегорио Риччи – Курбастро (1853 – 1925) и его школе.

Пространство может иметь переменную во времени геометрию. Его динамика должна определяться какими-то уравнениями. Записав эти уравнения для метрики пространства, особенно, если эти уравнения выведены из принципа наименьшего действия, мы приравниваем пространство с физической точки зрения к другим физическим полям, например, электромагнитному. Возникает новая область исследования – *динамика пространства*.

Введению в эту область и посвящена данная книга. *Теория глобального времени* (ТГВ) физически различает время и пространство в отличие от общей теории относительности (ОТО), где они смешаны в четырехмерное многообразие. В ТГВ много общего с ОТО, однако принципиально различные исходные положения и слегка различается система решаемых уравнений: в ТГВ уравнения описывают динамику во времени всех полей, в том числе и пространства, в то время как в ОТО ищутся четырехмерные решения, содержащие и прошлое, и настоящее, и будущее. Решения ОТО образуют подмножество решений ТГВ с плотностью энергии всюду равной нулю. Выход же на ненулевые плотности энергии в дополнение к решениям ОТО дает дополнительное множество решений, которые, видимо, могут в значительной степени пролить свет на особенности космической динамики, объясняемыми на базе ОТО “темной материей”, “темной энергией”, “гигантскими черными дырами” и пр.

Это вторая книга по динамике пространства в теории глобального времени. Первая – “Время, пространство, тяготение”, – выходящая в издательстве НИЦ РХД, Ижевск, посвящена обсуждению философских и физических проблем, связанных с пространством и временем, дискуссии об общей теории относительности, но при этом включает практически весь материал данной книги. Эта же книга предельно очищена от полемики и задумана как университетский учебник по теории пространства и времени. Курс может быть прочитан за один семестр, но обязательно должен включать практикум на компьютере. Риманова геометрия требует значительных по трудоемкости вычислений, которые не будут обременительными, если использовать системы аналитических компьютерных вычислений. В этой книге излагаются средства в пакете Mathematica, которым посвящена отдельная глава.

В первой главе кратко излагается классический математический аппарат тензорного исчисления и римановой геометрии.

Однако, абсолютное исчисление Риччи еще не предоставляет всех необходимых инструментов для описания динамических, переменных во времени римановых пространств. Во второй главе вводится математический инструмент *ковариантной производной по времени*, позволяющий описывать переменные римановы пространства из неинерциальных систем.

В третьей главе из принципа наименьшего действия выводятся уравнения динамики пространства. Эти уравнения состоят из шести

динамических уравнений и трех уравнений связи и обеспечивают сохранение величины *гамильтониана*, который, однако, в отличие от электродинамики законоопределен – плотность энергии может быть как положительной, отрицательной, так и равной нулю.

В четвертой главе приводятся некоторые решения выведенных уравнений.

В пятой главе описывается движение частиц и света в полученных динамических пространствах. Динамика частиц может быть и релятивистской. Описываются, в частности, явления отклонения света тяготеющей массой (Солнцем), вращение перигелия Меркурия, ранее считавшиеся эффектами общей теории относительности.

Шестая глава посвящена общей теории относительности, сравнению ее подходов с подходами динамической теории пространства – теории глобального времени.

В седьмой главе рассматриваются приближенные методы, в частности, нерелятивистское приближение, а также на основе приближения слабого поля излагается описание гравитационных волн, фактически совпадающее в линейном приближении с описанием в ОТО.

В восьмой главе дан набросок квантовой теории гравитации – квантовой теории динамики пространства. При наличии ненулевого гамильтониана квантовая теория строится стандартным образом, исходя из уравнения Шредингера. Решаются квантовые космологические задачи. Но, конечно, это только первые шаги в квантовой теории гравитации.

В девятой главе рассматривается математический аппарат для описания задачи Коши в теории поля и, в частности, в динамической теории пространства.

В десятой главе предлагаются модули в системе Mathematica S. Wolfram'a для выполнения достаточно трудоемких вычислений римановой геометрии и ТГВ на компьютере.

# Глава 0

## Римановы пространства

### 1.1 Основы римановой геометрии

В уравнениях динамики, начало которым положил Ньютон, основную роль играют бесконечно малые приращения координат и расстояние между двумя бесконечно близкими точками. В декартовой системе координат расстояние между двумя точками определяется теоремой Пифагора:

$$l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2. \quad (1.1)$$

В криволинейных координатах – это также теорема Пифагора, но в бесконечно малом. Например, в сферической системе:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (1.2)$$

Инвариантное расстояние между бесконечно близкими точками в какой-то другой системе с координатами  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  при заданной зависимости от них декартовых координат выглядит следующим образом:

$$dl^2 = \gamma_{11} (d\xi^1)^2 + \gamma_{22} (d\xi^2)^2 + \gamma_{33} (d\xi^3)^2 + 2\gamma_{12} d\xi^1 d\xi^2 + 2\gamma_{13} d\xi^1 d\xi^3 + 2\gamma_{23} d\xi^2 d\xi^3, \quad (1.3)$$

где  $\gamma_{ij}$  – метрический тензор пространства. В евклидовом пространстве

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial x}{\partial \xi^i} \frac{\partial x}{\partial \xi^j} + \frac{\partial y}{\partial \xi^i} \frac{\partial y}{\partial \xi^j} + \frac{\partial z}{\partial \xi^i} \frac{\partial z}{\partial \xi^j}.$$

Эти выражения достаточно громоздки, однако их запись и общие методы работы с ними могут быть существенно упрощены принятием некоторых *соглашений*.

### 1.1.1 Общепринятые соглашения

В классической механике время выделено и имеется три пространственных координаты  $x^i$ , индексы которых обозначаются латинскими буквами  $i, j, k, \dots$ , меняются от 1 до 3-х и пишутся сверху.

- Многокомпонентные поля могут иметь верхние и нижние индексы.
- Правило суммирования: если один и тот же индекс встречается вверху и внизу, это автоматически определяет суммирование по данному индексу:

$$\Gamma_{jk}^i A^k \equiv \sum_{k=1}^3 \Gamma_{jk}^i A^k.$$

- Результат суммирования не зависит от наименования индекса суммирования:  $A_j^i B^j = A_k^i B^k$ .
- Метрический тензор симметричен  $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ , имеет шесть компонент (в трехмерном пространстве):  $i, j = 1 \dots 3$ :

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (1.4)$$

- Обратный метрический тензор:

$$\gamma^{ij} \gamma_{jk} = \delta_k^i,$$

где  $\delta_k^i$  – единичная матрица Кронекера.

- Используется сокращенная запись производных:

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^j} \equiv \partial_j A^i \equiv A^i_{,j}.$$

- *Абсолютный антисимметричный тензор*  $\epsilon_{[ijk]}$  меняет знак при перестановке любых двух индексов, следовательно, у него отличны от нуля только компоненты с различными индексами, равные компоненте  $\epsilon_{[123]}$  со знаком плюс или минус. В декартовых координатах евклидова пространства  $\epsilon_{[123]} = 1$ .

### 1.1.2 Тензоры в римановом пространстве

В римановом пространстве в бесконечно малой окрестности любой точки можно найти координаты, в которых метрика представляется единичной матрицей и первые производные по любой координате от компонент метрики *в этой точке* равны нулю:

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2; \quad \gamma_{ij} = \delta_{ij}.$$

Такая система координат называется *локально декартовой* в заданной точке. Это говорит о том, что в бесконечно малом любое риманово пространство является евклидовым. Так, сферическая Земля в масштабах лаборатории или поля, значительно меньших, чем радиус Земли, имеет (приблизительно; точно – лишь в бесконечно малом) геометрию двумерной евклидовой плоскости.

Физические поля математически описываются тензорами, компоненты которых преобразуются по определенным законам при преобразовании координат. Например, выражение для длины (1.4) при замене координат  $x^i(\tilde{x})$ , так как дифференциал преобразуется по правилу Лейбница  $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} d\tilde{x}^k$ , в новых координатах имеет вид:

$$dl^2 = \gamma_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m} d\tilde{x}^k d\tilde{x}^m = \tilde{\gamma}_{km} d\tilde{x}^k d\tilde{x}^m,$$

что и определяет преобразование компонент метрики при преобразовании координат как *дважды ковариантного тензора*:

$$\tilde{\gamma}_{km} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m} \gamma_{ij}.$$

Число индексов у компонент тензора – его *ранг*. Скаляр не имеет индексов – это тензор нулевого ранга – и при преобразовании координат его единственная компонента остается неизменной. Индексы могут быть нижними (ковариантными) и верхними (контравариантными). Преобразование компонент тензоров с верхними и нижними индексами проводится взаимно обратными матрицами. Например, для *контравариантного* ( $A^i$ ) и *ковариантного* ( $B_i$ ) векторов (тензоров первого ранга) преобразования взаимно обратны:

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \bar{A}^j; \quad B_i = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \bar{B}_k; \quad \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} = \delta_j^k. \quad (1.5)$$

(Напомним, что по индексу  $i$  здесь идет суммирование). Это свойство обеспечивает *свертку* тензоров по одному верхнему и одному нижнему индексам, в частности, свертка произведения контравариантного и ковариантного векторов определяет скаляр:

$$A^i B_i = \bar{A}^j \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \bar{B}_k = \bar{A}^j \delta_j^k \bar{B}_k = \bar{A}^k \bar{B}_k \equiv (A, B).$$

Компоненты тензора в одной системе координат являются линейными и однородными функциями компонент в другой системе. Это свойство определяет понятия *нулевого тензора*:

если *все* компоненты тензора равны нулю в одной системе координат, в любой другой системе *все* его компоненты также равны нулю.

Если все соответствующие компоненты двух тензоров одинаковой структуры равны в одной системе координат, то они равны и в любой другой.

Поднятие и опускание индексов – также согласовано во всех координатных системах. Оно производится с помощью метрического тензора или обратного ему:

$$A^i{}_{jk} = \gamma^{im} A_{mj}{}^s \gamma_{sk}.$$

В частности, это дает возможность определить *скалярное произведение* векторов с одинаковым расположением индексов:

$$(A, B) = A^i B_i = \gamma_{ij} A^i B^j = \gamma^{ij} A_i B_j.$$

Так как в локально декартовой системе координат метрический тензор представляется единичной матрицей, в этой системе величины компонент тензоров не зависят от положения индексов (вверху или внизу).

### 1.1.3 Симметрия тензоров

В общем случае тензор  $k$ -го ранга в  $n$ -мерном пространстве имеет  $n^k$  компонент – каждый индекс независимо от других пробегает  $n$  значений.

Однако, тензоры могут обладать свойствами *симметрии*, уменьшающими число независимых компонент. Рассмотрим дважды ковариантный тензор второго ранга  $a_{ij}$  и построим из его компонент структуру, симметричную по индексам

$$a_{\{ij\}} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}); \quad a_{\{ji\}} = a_{\{ij\}}.$$

При преобразовании координат компоненты этой структуры преобразуются как тензор:

$$\tilde{a}_{\{ij\}} = \frac{1}{2}(\tilde{a}_{ij} + \tilde{a}_{ji}) = \frac{1}{2} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j} (a_{kl} + a_{lk}) = \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j} a_{\{kl\}}.$$

Аналогично, из него можно построить тензор, антисимметричный по индексам – компонента меняет знак при перестановке индексов:

$$a_{[ij]} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}); \quad a_{[ji]} = -a_{[ij]}.$$

Эти компоненты также образуют тензор, преобразующийся при преобразовании координат по тензорным законам.

Таким образом, свойства симметрии тензора по перестановке индексов сохраняются при преобразованиях координат, то есть являются *инвариантной характеристикой тензора*.

Из построенных конструкций видно, что

$$a_{ij} = a_{\{ij\}} + a_{[ij]}$$

– дважды ковариантный тензор второго ранга представим в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров. У антисимметричного тензора индексы компонент, не равных нулю, должны

быть разными, при этом при изменении порядка индексов меняется только знак: при четной перестановке знак не меняется, а при нечетной – меняется на противоположной, так что при данном наборе разных индексов независимой является одна компонента, поэтому число независимых компонент антисимметричного тензора второго ранга в  $n$ -мерном пространстве равно числу сочетаний из  $n$  по 2, то есть  $n(n-1)/2$ . В частности, при  $n=3$  число компонент антисимметричного тензора второго ранга равно трем – как и число компонент вектора.

Это рассуждение применимо и для антисимметричных тензоров любого  $k$ -го ранга в  $n$ -мерном пространстве, количество независимых компонент которых вследствие этого оказывается

$$N_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = N_n^{n-k}.$$

При  $k > n$  антисимметричный тензор вообще не может иметь ненулевых компонент: в этом случае из  $n$  значений нельзя выбрать  $k > n$  различных значений.

При  $k = n$  имеется всего одна компонента – как у скаляра – и любой антисимметричный тензор  $n$ -го ранга в  $n$ -мерном пространстве представим в виде скаляра, умноженного на некоторый стандартизованный – *абсолютный антисимметричный тензор*, компонента которого  $\bar{\epsilon}_{[1,2,\dots,n]} = 1$  в локально декартовой системе координат, а остальные равны  $\pm 1$  в зависимости от порядка индексов. Например, в трехмерном пространстве ненулевые компоненты этого тензора (чертой мы помечаем значение компоненты в локально декартовой системе)

$$\bar{\epsilon}_{[123]} = \bar{\epsilon}_{[231]} = \bar{\epsilon}_{[312]} = 1; \quad \bar{\epsilon}_{[213]} = \bar{\epsilon}_{[321]} = \bar{\epsilon}_{[132]} = -1.$$

При переходе к произвольным координатам

$$\epsilon_{[123]} = \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} \bar{\epsilon}_{[ijk]} = J \bar{\epsilon}_{[123]} = J,$$

где  $J$  – детерминант матрицы

$$(A) = \left( \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right); \quad J = \det(A) \quad (1.6)$$

– якобиан преобразования координат.

Этот якобиан можно вычислить следующим образом. Запишем преобразование метрического тензора из локально декартовой системы, где он представляется единичной матрицей в произвольную в матричном виде:

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \bar{\gamma}_{kl} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j}; \quad (\gamma) = (A) \cdot (\bar{\gamma}) \cdot (A)^T,$$

где  $(A)^T$  – транспонированная матрица преобразования (1.6), детерминант которой равен детерминанту матрицы  $(A)$  и равен  $J$ .

Используя теорему о детерминанте произведения матриц и помня, что  $(\bar{\gamma}) = (\mathbf{1})$ , обозначив детерминант метрического тензора буквой  $\gamma$ , получаем:

$$\gamma = J^2; \quad J = \sqrt{\gamma}. \quad (1.7)$$

Не нужно каждый раз разыскивать локально декартову систему и находить детерминант преобразований; достаточно вычислить детерминант метрического тензора.

Аналогично абсолютно антисимметричному тензору с нижними индексами определяется абсолютно антисимметричный тензор с верхними индексами. В локально декартовой системе он удовлетворяет соотношению

$$\epsilon^{[ijk]} \epsilon_{[klm]} = \delta_l^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_l^j. \quad (1.8)$$

Однако это соотношение тензорное и остается верным в любой другой системе. Из него следует, что компонента  $\epsilon^{[123]} = 1/\sqrt{\gamma}$ .

Число компонент симметричного тензора второго ранга в  $n$ -мерном пространстве равно  $n(n+1)/2$  вследствие разложения общего тензора второго ранга с  $n^2$  компонент на симметричную и антисимметричную части.

Важным результатом изучения симметрии тензоров является теорема: *свертка симметричного тензора с антисимметричным тождественно равна нулю*:

$$A^{[ij]} B_{[ij]} = -A^{[ji]} B_{[ji]} = 0.$$

При свертке тензора общего вида с симметричным тензором из первого вырезается его симметричная часть, а при свертке с антисимметричным – антисимметричная часть.

Тензоры более высокого ранга могут быть симметричны или антисимметричны по группам индексов.

### 1.1.4 Ковариантное дифференцирование

Исходно физические законы формулируются в локально декартовых координатах. Как правило, в эти законы входят производные от физических величин – производные от тензоров. Как переносится операция дифференцирования из локально декартовой системы  $(\bar{x}^i)$  в произвольную систему координат  $(x^i)$ ? Начнем с вектора. В локально декартовой системе координат

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} \bar{A}^i &= \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} A^m \right) = \\ &= \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} \frac{\partial A^m}{\partial x^k} + \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^k \partial x^m} A^m = \\ &= \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} \left( \frac{\partial A^l}{\partial x^k} + \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial^2 \bar{x}^s}{\partial x^k \partial x^m} A^m \right). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Введем трехиндексную *связность*

$$\Gamma_{km}^l = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^s} \frac{\partial^2 \bar{x}^s}{\partial x^k \partial x^m} = \Gamma_{mk}^l, \quad (1.10)$$

симметричную по нижним индексам, компоненты которой выражаются через первые и вторые производные старых и новых координат. Тогда выражение в правой части (1.9) – преобразованная по законам преобразования тензора *ковариантная производная*, являющаяся тензорным представителем обычной частной производной в локально декартовой системе, – примет вид:

$$\nabla_k A^l \equiv A^l_{;k} = A^l_{,k} + \Gamma_{km}^l A^m. \quad (1.11)$$

В отличие от частной производной, сокращенно обозначаемой запятой, ковариантную производную мы будем отделять точкой с запятой.

Компоненты связности не образуют тензора: в локально декартовой системе координат все компоненты в выделенной точке равны нулю (поэтому ковариантная производная совпадает с частной), в других координатах – отличны от нуля.

Ковариантная производная тензора является тензорным представителем частной производной в локально декартовой системе координат, поэтому, сразу можно записать правило ковариантного дифференцирования произведения тензоров (как и для обычной частной производной):

$$\nabla_m(T_{jk}^i P_r^{ls}) = P_r^{ls} \nabla_m T_{jk}^i + T_{jk}^i \nabla_m P_r^{ls},$$

откуда несложно вывести правило ковариантного дифференцирования тензоров произвольного ранга:

$$\nabla_m T_{jk}^i = \partial_m T_{jk}^i + \Gamma_{ms}^i T_{jk}^s - \Gamma_{mj}^s T_{sk}^i - \Gamma_{mk}^s T_{js}^i. \quad (1.12)$$

Из вышеприведенных формул кажется, что для вычисления связностей нужно знать связь системы координат с локально декартовой. Однако, существует другой путь для вычисления связностей. В локально декартовой системе первые производные компонент метрического тензора равны нулю, поэтому в любой другой системе координат *ковариантные производные* метрического тензора равны нулю:

$$\nabla_k \gamma_{ij} = \gamma_{ij,k} - \Gamma_{ki}^s \gamma_{sj} - \Gamma_{kj}^s \gamma_{is} = 0,$$

что можно при заданном метрическом тензоре (и, следовательно, его частных производных) рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно связностей, откуда (с учетом симметрии связностей по нижним индексам) можно выразить связности через первые производные метрического тензора:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{\gamma^{is}}{2} (\gamma_{sj,k} + \gamma_{sk,j} - \gamma_{jk,s}). \quad (1.13)$$

Таким образом, задание метрического тензора как функции координат позволяет осуществить тензорный перенос производной любого тензорного поля из локально декартовой системы координат в произвольную.

### 1.1.5 Операторы теории поля

В обычной теории поля используются такие операции, как градиент функции, дивергенция и ротор вектора, оператор Лапласа.

Как эти операции переносятся в искривленное пространство? Исходным здесь является следующий подход: малая область риманова пространства является почти плоской (точно – бесконечно малая). Введем в ней декартовы координаты (локально декартовы) и запишем в них упомянутые операторы в их традиционном виде. Переход в произвольные координаты совершается заменой обычных частных производных на ковариантные при учете преобразования метрического тензора.

Градиент скаляра  $\nabla_i f = \partial_i f$  – выражается таким образом в любой системе координат. В этом выражении не появляется ни метрический тензор, ни связности.

Дивергенция вектора (скаляр) должна быть выражена через ковариантные производные:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla_i A^i = A^i{}_{;i} + \Gamma_{ji}^i A^j = A^i{}_{;i} + A^i \frac{(\sqrt{\gamma})_{;i}}{\sqrt{\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_i (\sqrt{\gamma} A^i). \quad (1.14)$$

В выражении для дивергенции от метрического тензора входит только  $\sqrt{\gamma}$ .

Выражение для оператора Лапласа скалярной функции прямо следует из выражения для дивергенции вектора:

$$A^i = \gamma^{ij} f_{;j}; \quad \Delta f = \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_i (\sqrt{\gamma} \gamma^{ij} \partial_j f). \quad (1.15)$$

Ротор вектора представляется антисимметричным тензором второго ранга и в любых координатах, в любом римановом пространстве не зависит от связностей:

$$a_{[ij]} = a_{i;j} - a_{j;i} = a_{i,j} - a_{j,i}.$$

В трехмерном пространстве этот тензор имеет три компоненты, как и вектор, компоненты которого можно представить через компоненты этого антисимметричного тензора с помощью обратного абсолютного антисимметричного тензора:

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a})^i = \epsilon^{[ijk]} a_{j,k}. \quad (1.16)$$

Все эти формулы применимы не только в римановом пространстве, но и в евклидовом в произвольных координатах: сферических, цилиндрических и пр.

### 1.1.6 Инвариантные интегралы

При преобразованиях координат от локально декартовых к произвольным в мере интегрирования возникает якобиан преобразования  $J$ :

$$d\bar{x}^1 d\bar{x}^2 d\bar{x}^3 = \det \left| \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right| dx^1 dx^2 dx^3 = J dx^1 dx^2 dx^3,$$

который, как было вычислено в (1.7), равен корню из детерминанта метрического тензора. Поэтому мера объема в локально декартовой системе выражается в произвольной системе как

$$d\bar{x}^1 d\bar{x}^2 d\bar{x}^3 = \sqrt{\gamma} dx^1 dx^2 dx^3 \equiv \sqrt{\gamma} d_3x.$$

Для инвариантности интеграла по отношению к произвольному преобразованию координат эта мера под интегралом должна умножаться на скаляр.

Исключительно важной является *теорема Гаусса*

$$\int_B \nabla_i w^i \sqrt{\gamma} d_3x = \int_B \partial_i (w^i \sqrt{\gamma}) d_3x = \oint_{\partial B} w^i \sqrt{\gamma} ds_i, \quad (1.17)$$

преобразующая интеграл в области  $B$  от дивергенции вектора в поток этого вектора через границу области  $\partial B$ .

### 1.1.7 Тензор кривизны

Если расписать коммутатор (тензор)

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) A^i = R_{jkl}^i A^j,$$

то результат в общем случае не равен нулю, а выражается через

$$R_{jkl}^i = \Gamma_{jl,k}^i - \Gamma_{jk,l}^i + \Gamma_{sk}^i \Gamma_{jl}^s - \Gamma_{sl}^i \Gamma_{jk}^s \quad (1.18)$$

– *тензор кривизны пространства* (тензор Римана – Кристоффеля). Если пространство евклидово, то в нем можно ввести декартовы координаты, где связности всюду равны нулю и, следовательно, тензор  $R_{jkl}^i$  всюду равен нулю. Этот тензор математически отличает искривленное пространство от плоского.

Аналогичный коммутатор для тензора произвольного ранга содержит столько слагаемых с тензором кривизны, каков его ранг:

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) T_{jm}^i = R_{skl}^i T_{jm}^s - R_{jkl}^s T_{sm}^i - R_{mkl}^s T_{js}^i.$$

В локально декартовой системе координат первые производные от метрического тензора так же, как и связности, равны нулю, но производные от связностей могут быть отличны от нуля, и тензор кривизны (1.18) выражается через вторые производные метрического тензора:

$$R_{jkl}^i = \partial_k \Gamma_{jl}^i - \partial_l \Gamma_{jk}^i = \frac{\gamma^{is}}{2} (\gamma_{sl,jk} + \gamma_{jk,sl} - \gamma_{sk,jl} - \gamma_{jl,sk}). \quad (1.19)$$

В общих координатах добавляются слагаемые со связностями:

$$\begin{aligned} \sqrt{\gamma} R &= \sqrt{\gamma} (\gamma^{ik} \gamma^{jl} - \gamma^{il} \gamma^{jk}) \gamma_{jk,il} - \sqrt{\gamma} \mathcal{L} \\ &= \partial_i (\sqrt{\gamma} (\gamma^{ik} \gamma^{jl} - \gamma^{il} \gamma^{jk}) \gamma_{jk,l}) + \sqrt{\gamma} \mathcal{L}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где  $\mathcal{L}$  квадратичная по связностям функция

$$\mathcal{L} = \gamma^{ij} (\Gamma_{im}^k \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{ij}^k \Gamma_{km}^m) \quad (1.21)$$

Вторые производные метрического тензора входят в кривизну линейно.

Тензор кривизны обладает важными свойствами симметрии, которые можно вывести из выражения (1.19):

- Антисимметрия в первой и второй парах индексов:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{jilk} = R_{[ij][kl]}.$$

- Симметрия по парам индексов:

$$R_{[ij][kl]} = R_{[kl][ij]}.$$

- Тожество Риччи:

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0.$$

- Дифференциальное тождество Бьянки:

$$R_{ijkl;m} + R_{ijlm;k} + R_{ijmk;l} = 0. \quad (1.22)$$

Наличие этих тождеств уменьшает число независимых компонент тензора кривизны, которых в  $n$ -мерном пространстве оказывается

$$N = \frac{n^2(n^2 - 1)}{12}. \quad (1.23)$$

Так, в двумерном пространстве он имеет всего одну компоненту (гаусова кривизна), в трехмерном – шесть.

Свертка тензора кривизны по одному верхнему и среднему нижнему индексам приводит к тензору второго ранга – *тензору Риччи*

$$R_{jl} = R_{jil}^i = R_{lj}, \quad (1.24)$$

симметричному по индексам.

Свертка тензора Риччи с метрическим тензором определяет скалярное поле – *скалярную кривизну пространства*:  $\gamma^{ij} R_{ij} = R$ .

Наконец, комбинация

$$G_j^i = R_j^i - \frac{1}{2} \delta_j^i R \quad (1.25)$$

называется тензором Эйнштейна, который удовлетворяет *тождеству Гильберта*:

$$\nabla_i G_j^i = 0, \quad (1.26)$$

которое можно получить, дважды свернув тождества Бьянки (1.22).

Почти все формулы, приведенные выше, не зависят от размерности пространства.

## 1.2 Двумерные поверхности

Метрический тензор двумерной поверхности имеет три компоненты, зависящие от двух координат:

$$dl^2 = \gamma_{11} (dx^1)^2 + 2 \gamma_{12} dx^1 dx^2 + \gamma_{22} (dx^2)^2 \quad (1.27)$$

Но имеется и два независимых преобразования координат, с помощью которых можно изменять компоненты метрики.

Например, метрика любой двумерной поверхности может быть приведена к *конформно плоскому виду*, определяемому всего лишь одной функцией координат:

$$dl^2 = f^2(x, y) (dx^2 + dy^2), \quad (1.28)$$

в котором обе координаты входят равноправно. Можно, наоборот, выделить одну из координат, приведя метрику к виду:

$$dl^2 = dx^2 + u^2(x, y) dy^2. \quad (1.29)$$

Тензор Римана – Кристоффеля у двумерных поверхностей имеет всего одну независимую компоненту  $R_{[12]}^{[12]}$ , а тензор Риччи, выражающийся через него алгебраически, – три компоненты, между которыми поэтому имеется линейная зависимость между компонентами тензора Риччи, выражающаяся в равенстве нулю тензора Эйнштейна для любых двумерных поверхностей.

В двумерном случае  $R\sqrt{\gamma}$  является полной дивергенцией:

$$\begin{aligned} R\sqrt{\gamma} &= \partial_i (\sqrt{\gamma} (\gamma^{ik} \gamma^{jl} - \gamma^{il} \gamma^{jk}) \gamma_{jk;l}) = \\ &= \partial_1 \left( \frac{\gamma_{12;2} - \gamma_{22;1}}{\sqrt{\gamma}} \right) + \partial_2 \left( \frac{\gamma_{12;1} - \gamma_{11;2}}{\sqrt{\gamma}} \right), \end{aligned}$$

поэтому интеграл по какой-то области  $B$  двумерной поверхности, имеющей границу  $\delta B$ , сводится к интегралу по границе

$$\int_B R\sqrt{\gamma} d_2x = \oint_{\delta B} w_i dl^i, \quad (1.30)$$

где

$$w_1 = \frac{\gamma_{12;1} - \gamma_{11;2}}{\sqrt{\gamma}}; \quad w_2 = -\frac{\gamma_{12;2} - \gamma_{22;1}}{\sqrt{\gamma}},$$

а по замкнутой поверхности (у которой граница отсутствует) при ее малой вариации величина этого интеграла не меняется – является *топологическим инвариантом*:

$$K = \frac{1}{4\pi} \oint \sqrt{\gamma} R d_2x = n. \quad (1.31)$$

Целое число  $1 - n$  называется *родом поверхности*. Например, у сферы вне зависимости от радиуса, а также эллипсоида – любой поверхности, которую можно *без разрывов* непрерывно деформировать в сферу, это число равно нулю, а, например, у тора – единице.

### 1.2.1 Двумерная сфера

Наиболее наглядным, привычным и определенным не евклидовым пространством является двумерная сфера – поверхность мяча, глобуса, Земного шара, Солнца. Точка на двумерной поверхности определяется двумя координатами, например, на сфере наиболее часто применяют сферические углы  $\vartheta$  – широта (правда, в математике  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ , в отличие от географии, где  $-\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi/2$ ), метрика в которых для сферы радиуса  $r$  выглядит так:

$$dl^2 = r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (1.32)$$

Очень часто применяются *конформные* координаты на сфере

$$dl^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 + (x^2 + y^2)/(4r^2))^2}. \quad (1.33)$$

В любых координатах единственная независимая компонента тензора Римана – Кристоффеля сферы

$$R_{[12]}^{[12]} = \frac{1}{r^2},$$

а скалярная кривизна

$$R = \frac{2}{r^2}.$$

## 1.3 Трехмерные пространства

Шесть компонент метрики трехмерного пространства  $(\gamma_{ij})$ , зависящие от трех координат, можно изменять преобразованием трех функций координат. Например, в трехмерном евклидовом пространстве в сферических координатах метрика имеет вид:

$$dl^2 = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (1.34)$$

В общем случае, используя три координатных преобразования, можно уничтожить три недиагональные компоненты метрического тензора (в общем случае – в конечной области), приведя метрику к *тридиагональному виду*:

$$dl^2 = a^2(x, y, z) dx^2 + b^2(x, y, z) dy^2 + c^2(x, y, z) dz^2.$$

В *трехмерном* пространстве тензор Римана – Кристоффеля алгебраически выражается через тензор Эйнштейна ( $\epsilon_{[ijk]}$  – абсолютный антисимметричный тензор):

$$R_{kl}^{ij} = -\epsilon^{[ijs]} \epsilon_{[klm]} G_s^m, \quad (1.35)$$

поэтому равенство нулю тензора Риччи (или тензора Эйнштейна) в трехмерном случае приводит к плоскому пространству.

### 1.3.1 Трехмерная сфера

В качестве примера, полезного для дальнейшего, рассмотрим трехмерную сферу. Хотя двумерная сфера хорошо всем известна (поверхность глобуса, мяча), трехмерная сфера из-за непривычности кажется нередко чуть ли не противоречивым объектом.

Она является одним из объектов в серии  $n$ -мерных сфер.  $n$ -мерная сфера радиуса  $r$  имеет два полюса – северный и южный – и параллели –  $(n - 1)$ -мерные сферы с радиусами, увеличивающимися от нуля у северного полюса до  $r$  (экватор), а затем опять убывающего до нуля к южному полюсу вдоль одномерного *меридиана*. Точки на меридиане можно определять углом  $0 \leq \vartheta \leq \pi$  (широта) и длина вдоль меридиана  $dl = r d\vartheta$ .

Метрику  $n$ -мерной сферы  $d\Omega_n^2(r)$  радиуса  $r$  можно записать через метрику сферы единичного радиуса  $d\omega_n^2$ :

$$d\Omega_n^2(r) = r^2 d\omega_n^2; \quad d\omega_n^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\omega_{n-1}^2. \quad (1.36)$$

Интегрирование по всем переменным дает  $n$ -мерный объем  $n$ -мерной сферы радиуса  $r$ :

$\Sigma_n(r) = r^n \sigma_n$  (последнее – объем  $n$ -мерной сферы единичного радиуса).

$$\sigma_n = \sigma_{n-1} \int_0^\pi \sin^{n-1} \vartheta d\vartheta = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}) \sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \sigma_{n-1}. \quad (1.37)$$

Сфер отрицательного радиуса нет, поэтому нульмерная сфера состоит только из северного и южного полюсов. Объем ее равен числу 2. Одномерная сфера (окружность) имеет параллели в виде двух точек вдоль меридиана и одномерный объем ее (длина) равен  $2\pi r$ .

Хорошо известная двумерная сфера имеет параллелями окружности и ее 2-мерный объем (площадь) равен

$$\sigma_2 = 2\pi \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = 4\pi; \quad \Sigma_2(r) = 4\pi r^2.$$

У трехмерной сферы параллели и экватор – двумерные сферы. Объем 3-х мерной сферы единичного радиуса

$$\sigma_3 = 4\pi \int_0^\pi \sin^2 \vartheta d\vartheta = 2\pi^2, \quad (1.38)$$

а сферы радиуса  $r$ :  $\Sigma_3(r) = 2\pi^2 r^3$ .

При необходимости этот ряд может быть продолжен и можно построить геометрические характеристики  $n$ -мерных сфер.

Метрика трехмерной сферы радиуса  $r$  в *сферических координатах* параметризуется тремя углами:

$$dl^2 = r^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)). \quad (1.39)$$

Иногда полезно представление другими углами:

$$dl^2 = r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + \cos^2 \vartheta d\psi^2). \quad (1.40)$$

Очень часто, например, для описания вращения твердого тела, применяется параметризация трехмерной сферы углами Эйлера:

$$dl^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 (d\vartheta^2 + d\varphi^2 + d\psi^2 + 2 \cos \vartheta d\varphi d\psi). \quad (1.41)$$

Наиболее общим для сферы любой размерности является *конформно плоское* представление метрики, в частности, для трехмерной сферы имеющее вид метрики плоского пространства, умноженной на *конформный множитель*

$$dl^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left(1 + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4r^2}\right)^2}. \quad (1.42)$$

Тензор кривизны  $n$ -мерной сферы радиуса  $r$  выражается через тензор Кронекера  $\delta_j^i$ , представляемого единичной матрицей:

$$R_{kl}^{ij} = \frac{1}{r^2} (\delta_k^i \delta_l^j - \delta_l^i \delta_k^j); \quad R_k^i = \frac{n-1}{r^2} \delta_k^i; \quad R = \frac{n(n-1)}{r^2}. \quad (1.43)$$

В частности, для 3-х мерной сферы  $R = 6/r^2$ .

Эти свойства трехмерной сферы предлагается проверить для различных приведенных выше координат (метрик) с помощью модуля Ricci в пакете Mathematica, приведенного в разделе 10.1.1.

### 1.3.2 Пространство Лобачевского

Пространство Лобачевского – это риманово пространство постоянной отрицательной кривизны. По ряду своих свойств оно сходно с трехмерной сферой – это однородное, изотропное пространство: как и на сфере, в нем все точки равноправны и равноправны все направления.

Заменой кругового угла на гиперболический в метрике сферы (1.32) получается метрика “плоскости Лобачевского”

$$dl^2 = r^2 (d\vartheta^2 + \text{sh}^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (1.44)$$

а аналогичная замена в метрике трехмерной сферы (1.39) получается метрика трехмерного пространства Лобачевского

$$dl^2 = r^2 (d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)). \quad (1.45)$$

Аналогичная замена в метрике (1.40) приводит к другому виду метрики пространства Лобачевского:

$$dl^2 = r^2 (d\vartheta^2 + \text{sh}^2 \vartheta d\varphi^2 + \text{ch}^2 \vartheta d\psi^2), \quad (1.46)$$

а также к переменным, аналогичным углам Эйлера:

$$dl^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 (d\vartheta^2 + d\varphi^2 + d\psi^2 + 2 \text{ch} \vartheta d\varphi d\psi). \quad (1.47)$$

Из конформного представления трехмерной сферы (1.42) заменой знака перед  $r^2$  получается очень интересное представление Клейна:

$$dl^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left(1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4r^2}\right)^2} \quad (1.48)$$

Знаменатель обращается в нуль при  $x^2 + y^2 + z^2 = (2r)^2$ . Эта сфера представляет бесконечно удаленную сферу пространства Лобачевского, а все пространство представляется внутренними точками этой сферы.

С помощью модуля Рисси в разделе 10.1.1 предлагается изучить геометрические свойства пространства Лобачевского в этих различных координатах.

## 1.4 Отображения римановых пространств

Тензор Риччи обладает определенным свойством аддитивности: если в одних и тех же координатах заданы два пространства с метрическими тензорами  $\gamma_{ij}$  и  $\tilde{\gamma}_{ij}$ , то

$$\tilde{R}_{jkl}^i = R_{jkl}^i + S_{jkl}^i,$$

где тензор относительной кривизны  $S_{jkl}^i$  выражается через тензор относительной связности  $\Pi_{jk}^i$ , выражаемый через ковариантные в первом пространстве производные от метрического тензора второго пространства:

$$S_{jkl}^i = \nabla_k \Pi_{jl}^i - \nabla_l \Pi_{jk}^i + \Pi_{jl}^s \Pi_{sk}^i - \Pi_{jk}^s \Pi_{sl}^i, \quad (1.49)$$

где  $\Pi_{jk}^i$  – тензор относительной связности рассматриваемых пространств:

$$\begin{aligned} \Pi_{jk}^i &= \tilde{\Gamma}_{jk}^i - \Gamma_{jk}^i = \\ &= \frac{\tilde{\gamma}^{is}}{2} (\nabla_j \tilde{\gamma}_{sk} + \nabla_k \tilde{\gamma}_{sj} - \nabla_s \tilde{\gamma}_{jk}) = \\ &= -\frac{\gamma^{is}}{2} (\tilde{\nabla}_j \gamma_{sk} + \tilde{\nabla}_k \gamma_{sj} - \tilde{\nabla}_s \tilde{\gamma}_{jk}). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Если, например, первое пространство евклидово и в нем выбраны декартовы координаты, то связности в нем равны нулю и тензор относительной связности равен связностям второго пространства. Однако, при переходе к другим координатам (например, сферическим) его компоненты преобразуются как компоненты тензора третьего ранга. Если, например, и второе пространство евклидово и декартовы координаты первого пространства являются декартовыми координатами и второго, то в этой системе координат обе системы связностей равны нулю, а следовательно, и все компоненты  $\Pi_{jk}^i$  будут равны нулю, а так как это тензор – они будут оставаться нулевыми и в любой системе координат.

## 1.5 Геометрия и энергия

Поверхность Земли – сфера, географические карты – плоские. Главная проблема картографии не в том, чтобы отобразить какую-то часть сферической поверхности Земли на плоской карте без искажений – это невозможно, – а лишь в том, чтобы эти искажения как-то минимизировать в зависимости от размера отображаемой области и целей пользователя карты.

Мысленно продеваем следующие эксперимент. Возьмем полый внутри резиновый мяч и срежем с него “шапочку”, например, по 60-й параллели. На плоском столе эта “шапочка” будет возвышаться на высоту  $r(1 - \cos \vartheta)$ , где  $r$  – радиус мяча, а  $\vartheta$  – угловое расстояние до полюса ( $30^\circ$ ).

Придавим эту “шапочку” книгой, чтобы она распласталась между столом и книгой, стала плоской. На это нужно затратить энергию. Если давление сверху убрать, за счет этой энергии “шапочка” сможет поднять или даже подбросить книгу. В то же время эта “шапочка” без каких-либо усилий ложится на сферу с радиусом, равным радиусу ее внутренней поверхности.

Все тела принимают геометрические (метрические) свойства пространства, в котором они находятся, хотя последнее от вложения в него тел также может слегка меняться.

В примере с “шапочкой” на самом деле произошла еще и ничтожно малая деформация плоского стола. Он стал слегка не плоским. Но модуль упругости его вещества намного больше модуля упругости резины и деформацию претерпела, в основном, она.

Это был двумерный пример. Рассмотрим теперь трехмерный.

В сферическую форму залили расплавленный чугун и интенсивно охлаждают ее поверхность. Застывший чугунный шар будет иметь внутренние напряжения. Это значит, что при разрезании его на мелкие части, эти части невозможно будет сложить в шар снова без восстановления напряжений между соседними частями, без деформации этих частей. С точки зрения дифференциальной геометрии это означает, что вещество шара имеет внутреннюю кривизну.

Если такой шар вложить в область пространства, имеющую точно такое же распределение кривизны, как и в самом шаре, то отдельные части соединились бы без всякого напряжения. Напряжения возникают из-за несоответствия внутренней кривизны вещества шара и

кривизны пространства, в которое этот шар вложен.

Если бы пространство не обладало динамическими свойствами, играло бы роль только "меток", оно автоматически подстроило бы свою структуру под структуру кривизны вещества напряженного шара. Однако внутренние напряжения не только в нашем виртуальном шаре, но и в тысячах уже разрушившихся от внутренних напряжений реальных изделий, говорят, что с энергетической точки зрения пространство предпочитает минимально изменять свою кривизну под воздействием внешних тел.

Практически не меняющаяся геометрия самого пространства от находящегося в нем напряженного чугунного шара с другой внутренней геометрией и немалой энергией внутренних напряжений позволяет предположить, что изменение метрики пространства требует громадных энергий.

## Глава 1

# Неинерциальные системы

В классической механике при переходе из одной инерциальной системы к другой, движущейся относительно первой со скоростью  $V$ , в каждой точке одного из пространств имеется вектор скорости движения мгновенно совпадающей точки второго пространства относительно первого – имеется *однородное поле скоростей*.

Однако, даже и в евклидовом пространстве возможно движение одной координатной системы относительно другой с неоднородным (и, возможно, переменным во времени) полем скоростей.

Пространство обладает метрикой, которая может иметь кривизну и меняться со временем. Абсолютность пространства определяется неизменностью составляющих его точек, хотя расстояния между его точками могут меняться со временем. *Пространство является материальным носителем геометрических свойств*. В бесконечно малом пространстве является евклидовым – это одно из главных его *физических* свойств.

Относительно пространства находящиеся в нем тела могут перемещаться. Совокупность некоторых тел может описываться *движущейся системой координат*, координатные точки которой перемещаются относительно пространства. В этой системе – *неинерциальной* – имеется поле скоростей относительно пространства – *поле абсолютных скоростей*.

## 2.1 Вращающаяся система

Пусть мы находимся на “чертовом колесе”, вращающемся с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Опишем свободное движение материальной точки с точки зрения вращающегося на колесе наблюдателя. Поле скоростей вращающейся системы относительно инерциальной неоднородно:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = [\omega \times \mathbf{r}].$$

Скорость какой-то точки с координатами  $\mathbf{r}$  во вращающейся системе относительно инерциальной системы (абсолютная скорость)

$$\bar{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{r}} - [\omega \times \mathbf{r}].$$

Лагранжиан свободной частицы состоит только из кинетической энергии:

$$L = \frac{m \bar{\mathbf{v}}^2}{2} = \frac{m}{2} (\dot{\mathbf{r}} - [\omega \times \mathbf{r}])^2.$$

Через импульс можно выразить скорость изменения радиус-вектора относительно вращающейся системы:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m(\dot{\mathbf{r}} - [\omega \times \mathbf{r}]); \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{m} + [\omega \times \mathbf{r}].$$

Теперь можно записать гамильтониан свободной частицы

$$H = (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - L = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + (\mathbf{p} \cdot [\omega \times \mathbf{r}]) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - (\mathbf{r} \cdot [\omega \times \mathbf{p}]),$$

который определяет динамику

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{m} + [\omega \times \mathbf{r}]; \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = [\omega \times \mathbf{p}].$$

Подставляя сюда выражение импульса через скорость, для свободной частицы получаем:

$$\frac{d}{dt} m(\dot{\mathbf{r}} - [\omega \times \mathbf{r}]) = m\ddot{\mathbf{r}} - m[\omega \times \dot{\mathbf{r}}] = m[\omega \times \dot{\mathbf{r}}] - m[\omega \times [\omega \times \mathbf{r}]]$$

Последнее выражение можно сократить на массу – это значит, что закон движения свободной частицы не зависит от ее массы, и окончательно:

$$\ddot{\mathbf{r}} = 2[\omega \times \dot{\mathbf{r}}] + [\omega \times [\mathbf{r} \times \omega]] = \mathbf{w}_K + \mathbf{w}_c,$$

где  $\mathbf{w}_K$  и  $\mathbf{w}_c$  – кориолисово и центробежное ускорения соответственно.

Наиболее существенным моментом в рассмотренной задаче является *неоднородность поля скоростей* относительно инерциальной системы. Как преобразуются законы динамики при переходе в *неинерциальную систему* в общем случае, мы и рассмотрим в следующем разделе.

## 2.2 Ковариантная производная по времени

Обозначим пространственные координаты инерциальной системы через  $\bar{x}^i$ , а некоторой неинерциальной системы  $x^j(\bar{x}, t)$ . Производные по времени, если функция зависит от координат, в различных системах, в которых сами координаты меняются во времени по отношению к координатам пространства, выражаются по-разному. Производную по времени в инерциальной системе будем обозначать символом  $D_t$  и назовем ее *ковариантной производной по времени*. По правилу дифференцирования сложной функции

$$D_t F = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + V^i \frac{\partial F}{\partial x^i}, \quad (2.1)$$

что и определяет ковариантную производную от скаляра (эйконала, действия) в произвольной неинерциальной системе.

Для тензорной функции выражение чуть сложнее, так как производится еще преобразование, связанное с индексами. Рассмотрим сначала преобразование контравариантного векторного поля  $A^i$ . В инерциальной системе отсчета его компоненты будем обозначать  $\bar{A}^i$ :

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j; \quad \frac{\partial \bar{A}^i}{\partial t} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \left( \frac{\partial A^j}{\partial t} + V^k \frac{\partial A^j}{\partial x^k} \right) + A^j \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right).$$

Преобразуем последнюю производную:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right) = - \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^l}{\partial t} = - \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial x^j} V^l$$

Отсюда ковариантная производная по времени от контравариантного векторного поля выражается (одинаковым образом через обычные

и ковариантные производные, так как в последнем случае все связности сокращаются):

$$D_t A^i = \frac{\partial}{\partial t} A^i - A^j \frac{\partial}{\partial x^j} V^i + V^j \frac{\partial}{\partial x^j} A^i = \dot{A}^i - A^j V_{;j}^i + V^j A_{;j}^i. \quad (2.2)$$

Аналогично, для ковариантного векторного поля

$$D_t B_i = \frac{\partial}{\partial t} B_i + V_{;i}^j B_j + V^j B_{i;j} \quad (2.3)$$

и тензора произвольного ранга:

$$D_t Q_{jk}^i = \frac{\partial}{\partial t} Q_{jk}^i - V_{;s}^i Q_{jk}^s + V_{;j}^s Q_{sk}^i + V_{;k}^s Q_{js}^i + V^s Q_{jk;s}^i. \quad (2.4)$$

Она состоит из  $r + 2$  составляющих, где  $r$  – ранг тензора. При  $r = 0$  (скаляр) – мы имеем выражение (2.1) с двумя составляющими: частной производной по времени и “переносным” членом, определяемым полем абсолютных скоростей. Для тензоров, имеющих индексы, к каждому индексу (верхнему или нижнему) добавляется слагаемое, определяемое производной поля скоростей как для контравариантного (2.2) или ковариантного векторного поля (2.3) в зависимости от расположения индекса.

Особо важным является выражение для ковариантной производной по времени компонент метрического тензора. Так как пространственные ковариантные производные от него равны нулю,

$$D_t \gamma_{ij} = \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} + \gamma_{is} V^s_{;j} + \gamma_{js} V^s_{;i} + V^s \gamma_{ij;s} = \dot{\gamma}_{ij} + V_{i;j} + V_{j;i}. \quad (2.5)$$

Это преобразование определяет и ковариантную производную по времени от тензорных плотностей:

$$D_t \sqrt{\gamma} = \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\gamma} + \sqrt{\gamma} V_{;i}^i = \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\gamma} + \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{\gamma} V^i), \quad (2.6)$$

откуда следует

$$D_t (f \sqrt{\gamma}) = \frac{\partial}{\partial t} (f \sqrt{\gamma}) + \partial_i (V^i f \sqrt{\gamma}). \quad (2.7)$$

Теперь все соотношения, полученные в инерциальной системе координат, можно перенести в неинерциальную, заменив обычную производную по времени на ковариантную.

## 2.3 Ли – вариации

Формула преобразования метрики (2.5) дает возможность изучить несколько полезных частных случаев.

Наиболее естественное приложение этой формулы для описания постоянного пространства –  $D_t \gamma_{ij} = 0$  – в некоторой переменной системе координат. Формула определяет мгновенное изменение метрики  $\dot{\gamma}_{ij}$  в каждой точке, связанной с этой переменной системой:

$$\dot{\gamma}_{ij} = -\gamma_{is} V^s \cdot j - \gamma_{js} V^s \cdot i - V^s \gamma_{ij,s}. \quad (2.8)$$

Для тензора произвольного ранга, постоянного в инерциальной системе, в некоторой неинерциальной системе изменение компонент во времени определяется полем скоростей  $V^i$ :

$$\dot{Q}_{jk}^i = V^i \cdot s Q_{jk}^s - V^s \cdot j Q_{sk}^i - V^s \cdot k Q_{js}^i - V^s Q_{jk;s}^i. \quad (2.9)$$

Такая конструкция была изучена выдающимся норвежским математиком Софусом Ли (1842 – 1899) для бесконечно малых преобразований координат  $\delta x^i = V^i dt$ , называется *Ли – вариацией* тензорного поля  $Q_{jk}^i$  по полю  $V^i$  и обозначается

$$\delta_V Q_{jk}^i.$$

Для контравариантного векторного поля  $U^i$  Ли – вариация по полю  $V^i$

$$\delta_V U^i = V^i \cdot s U^s - V^s U_s^i = -\delta_U V^i \quad (2.10)$$

определяет *коммутатор* двух этих полей – конструкцию, антисимметричную по полям  $V^i$  и  $U^i$ :

$$[U, V]^i = U^s V^i \cdot s - V^s U^i \cdot s = -[V, U]^i. \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} & \delta_U (\delta_V Q_{jk}^i) - \delta_V (\delta_U Q_{jk}^i) = \\ & (\delta_U \delta_V - \delta_V \delta_U) Q_{jk}^i = \delta_{[U, V]} Q_{jk}^i. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Коммутатор двух векторных полей есть также векторное поле.

## 2.4 Движения римановых пространств

Для некоторых пространств существуют такие поля скоростей, которые обеспечивают стационарность метрики, несмотря на переменность во времени системы координат. Это условие следует из (2.8):

$$-\dot{\gamma}_{ij} = \gamma_{is} V^s{}_{,j} + \gamma_{js} V^s{}_{,i} + V^s \gamma_{ij,s} = 0 \quad (2.13)$$

Если метрический тензор как функция координат задан, то эти уравнения, называемые *уравнениями Киллинга*, являются однородными линейными дифференциальными уравнениями на векторное поле  $V^i$  (*поле Киллинга*) с тремя компонентами, самих же уравнений шесть – по числу компонент метрического тензора. Система является переопределенной, она имеет решения лишь для частных случаев пространств – пространств с движениями.

Наиболее известным и важным как геометрически, так и физически является евклидово пространство. В декартовой системе координат для метрического тензора  $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$  имеется шесть независимых решений уравнений Киллинга: три сдвига, нумеруемых индексом  $s$

$$V_{(s)}^i = \delta_{is}, \quad s = 1, 2, 3,$$

и три вращения, определяемых через абсолютный антисимметричный тензор  $\epsilon_{[ijk]}$ :

$$V_{(j)}^i = \epsilon_{[ijk]} x^k.$$

Если  $V_{(1)}^i$  и  $V_{(2)}^i$  – два поля Киллинга, то их суперпозиция с произвольными постоянными коэффициентами  $V^i = A V_{(1)}^i + B V_{(2)}^i$  также является полем Киллинга. Это есть следствие линейности уравнений Киллинга.

Из (2.12) следует, что и коммутатор двух полей Киллинга также является полем Киллинга. Этим в множество полей Киллинга конкретного пространства вводится антикоммутативное умножение. Тем самым множество полей Киллинга образует *алгебру*, носящую название *алгебры Ли*.

Поля Киллинга обладают важными дифференциальными свойствами:

1. Дивергенция поля Киллинга равна нулю. Действительно, сворачивая (2.13) с обратным метрическим тензором, получим

$$2V^s{}_{,s} + V^s \gamma^{ij} \gamma_{ij,s} = 2V^s{}_{,s} + V^s \gamma_{,s}; \quad \partial_s(\sqrt{\gamma} V^s) = 0.$$

2. Ковариантная производная поля Киллинга антисимметрична. Уравнение (2.13) можно представить через ковариантные производные

$$V^s{}_{;i} \gamma_{sj} + V^s{}_{;j} \gamma_{is} = V_{j;i} + V_{i;j} = 0; \quad V_{j;i} = -V_{i;j}.$$

3. В трехмерном случае ковариантная производная поля Киллинга представляется вектором, дуальным антисимметричному тензору ковариантной производной:

$$K^i = \epsilon^{[ijk]} V_{[j;k]}; \quad \text{rot}(\mathbf{V}) = \mathbf{K}.$$

Этот вектор является ротором поля Киллинга. Выбрав в малой области риманова пространства декартовы координаты, мы получим обычное соотношение между векторным полем и его ротором.

В главе 10 приведены тексты модулей, позволяющих проводить вычисление рассмотренных геометрических характеристик на компьютере.

### 2.4.1 Движения двумерной сферы

В качестве второго важного примера найдем векторы Киллинга двумерной сферы с метрикой в сферических координатах:

$$dl^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2; \quad \gamma_{\vartheta\vartheta} = 1; \quad \gamma_{\vartheta\varphi} = 0; \quad \gamma_{\varphi\varphi} = \sin^2 \vartheta.$$

В двумерном случае метрический тензор имеет три компоненты, поэтому уравнений Киллинга три:

$$-\dot{\gamma}_{\vartheta\vartheta} = 2V^s{}_{,\vartheta} \gamma_{s\vartheta} + V^s \gamma_{\vartheta\vartheta,s} = 2V^{\vartheta}{}_{,\vartheta} = 0.$$

Из этого уравнения следует, что компонента  $V^\vartheta$  зависит только от  $\varphi$ .

$$-\dot{\gamma}_{\vartheta\varphi} = V^{s,\vartheta} \gamma_{s\varphi} + V^{s,\varphi} \gamma_{\vartheta s} + V^s \gamma_{\vartheta\varphi,s} = \sin^2 \vartheta V^{\varphi,\vartheta} + V^{\vartheta,\varphi} = 0.$$

С учетом зависимости  $V^\vartheta$  только от  $\varphi$

$$V^\varphi = f(\varphi) \operatorname{ctg} \vartheta + C; \quad V^{\vartheta,\varphi} = f(\varphi).$$

Последнее уравнение

$$-\dot{\gamma}_{\varphi\varphi} = 2V_{,\varphi}^s \gamma_{s\varphi} + V^s \gamma_{\varphi\varphi,s} = 2(\sin^2 \vartheta \operatorname{ctg} \vartheta f'(\varphi) + V^{\vartheta}(\varphi) \sin \vartheta \cos \vartheta) = 0$$

определяет уравнение на  $f(\varphi)$ :

$$f'' + f = 0; \quad f = A \sin \varphi + B \cos \varphi,$$

откуда получается три независимых решения уравнений Киллинга (по числу констант интегрирования):

$$\begin{pmatrix} V^\vartheta \\ V^\varphi \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \operatorname{ctg} \vartheta \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \operatorname{ctg} \vartheta \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ AV_{(1)} + BV_{(2)} + CV_{(3)}. \quad (2.14)$$

Коммутационные соотношения между ними

$$[V_{(3)}, V_{(1)}] = V_{(2)}; [V_{(3)}, V_{(2)}] = -V_{(1)}; [V_{(1)}, V_{(2)}] = V_{(3)}.$$

### 2.4.2 Трехмерная сфера

Векторы Киллинга трехмерной сферы найдем в углах Эйлера, где метрика недиагональна:

$$dl^2 = \frac{r^2}{4}(d\vartheta^2 + d\varphi^2 + d\psi^2 + 2 \cos \vartheta d\varphi d\psi). \quad (2.15)$$

Векторы Киллинга находятся из шести уравнений Киллинга. Мы не будем подробно выводить решения этих уравнений, оставив это удовольствие для читателя. В математическом Приложении мы приводим программу подбора и *проверки* выполнения уравнений Киллинга. Решение шестипараметрично:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \xi^\vartheta \\ \xi^\varphi \\ \xi^\psi \end{pmatrix} &= a_1 \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \operatorname{ctg} \vartheta \\ -\cos \varphi / \sin \vartheta \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \operatorname{ctg} \vartheta \\ \sin \varphi / \sin \vartheta \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\
&+ b_1 \begin{pmatrix} \sin \psi \\ -\cos \psi / \sin \vartheta \\ \cos \psi \operatorname{ctg} \vartheta \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi / \sin \vartheta \\ -\sin \psi \operatorname{ctg} \vartheta \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \quad (2.16) \\
&\sum_{s=1}^3 (a_s \mu_{(s)} + b_s \nu_{(s)}),
\end{aligned}$$

где векторы из групп  $\mu$  и  $\nu$  коммутируют друг с другом  $[\mu_{(i)}, \nu_{(j)}] = 0$ , а внутри каждой группы они коммутируют как в группе движений двумерной сферы:

$$[\mu_{(i)}, \mu_{(j)}] = \epsilon_{[ijk]} \mu_{(k)}; \quad [\nu_{(i)}, \nu_{(j)}] = \epsilon_{[ijk]} \nu_{(k)}. \quad (2.17)$$

Как и для любого поля Киллинга, дивергенция каждого из этих полей равна нулю, а ротор обладает удивительно простым свойством:

$$\mathbf{rot}(\mu) = -\frac{2}{r} \mu; \quad \mathbf{rot}(\nu) = \frac{2}{r} \nu, \quad (2.18)$$

где  $r$  – радиус сферы.

## 2.5 Пространство В9

Общие свойства пространств лучше изучать, имея конкретные нетривиальные примеры. До сих пор в качестве примеров мы выбирали евклидово пространство и сферу. Эти пространства являются *однородными* и *изотропными*: первое означает, что они обладают такими полями Киллинга, что сдвигами по этим полям любую точку этого пространства мы можем перевести в другую, что означает равноправие всех точек пространства, а второе определяет равноправие всех направлений в окрестности выбранной точки. Из изотропности в окрестности любой точки следует однородность пространства. Действительно, изотропность означает, что тензор Риччи пропорционален метрическому тензору (мы докажем это только для трехмерного

пространства):

$$R_{ij} = f(x^k) g_{ij}; \quad R_j^i = f(x^k) \delta_j^i; \quad R = 3f;$$

Тензор Эйнштейна также пропорционален единичному

$$G_j^i = R_j^i - \frac{1}{2} \delta_j^i R = -\frac{1}{2} \delta_j^i f(x^k).$$

Из тождества Гильберта следует

$$G_{j;i}^i = -\frac{1}{2} \partial_j f(x^k) = 0; \quad f = \text{const.}$$

Отсюда следует постоянство кривизны пространства  $R_{ij;k} = 0$ .

Однако обратное неверно: однородное пространство не обязано быть изотропным. Классификация трехмерных однородных пространств была выполнена в 1918 году итальянским математиком Луиджи Бьянки (см. [3]). По его классификации трехмерная сфера принадлежит к классу 9. Однако этот класс значительно шире. Опираясь на вычисленные для трехмерной сферы векторы Киллинга (2.16), мы построим метрику общего однородного пространства В9.

Построим репер, обратный реперу  $\mu_{(k)}^i$ :

$$\sum_{k=1}^3 \mu_{(k)}^i \mu_{(k)j} = \delta_j^i.$$

Его компоненты  $\mu_{(k)j}$ :

$$(\mu_{(1)}, \mu_{(2)}, \mu_{(3)}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Метрика трехмерной сферы (2.15) может быть выражена через эти векторы:

$$\gamma_{ij} = \frac{r^2}{4} (\mu_{(1)i} \mu_{(1)j} + \mu_{(2)i} \mu_{(2)j} + \mu_{(3)i} \mu_{(3)j}).$$

Метрика общего пространства В9 получается обобщением этого выражения:

$$\gamma_{ij} = a^2 \mu_{(1)i} \mu_{(1)j} + b^2 \mu_{(2)i} \mu_{(2)j} + c^2 \mu_{(3)i} \mu_{(3)j} = \quad (2.20)$$

$$\begin{pmatrix} a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi & 0 & (a^2 - b^2) \cos \varphi \sin \vartheta \sin \varphi \\ 0 & c^2 & c^2 \cos \vartheta \\ (a^2 - b^2) \cos \varphi \sin \vartheta \sin \varphi & c^2 \cos \vartheta & c^2 \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta (b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi) \end{pmatrix}.$$

Корень из детерминанта этого тензора

$$\sqrt{\gamma} = a b c \sin \vartheta.$$

Полный объем пространства В9 равен  $16 \pi^2 abc$ . При  $a = b = c = r/2$  метрика переходит в метрику трехмерной сферы радиуса  $r$ .

Обратный метрический тензор выражается через исходные поля Киллинга:

$$\gamma^{ij} = \frac{1}{a^2} \mu_{(1)}^i \mu_{(1)}^j + \frac{1}{b^2} \mu_{(2)}^i \mu_{(2)}^j + \frac{1}{c^2} \mu_{(3)}^i \mu_{(3)}^j \quad (2.21)$$

При этом поля  $\mu_{(k)}^i$  перестают быть полями Киллинга этого пространства, но остаются геодезическими, а поля  $\nu_{(k)}^i$  из (2.16) остаются полями Киллинга. Так как коммутационные соотношения полей  $\nu_{(k)}^i$  (2.17) совпадают с коммутационными соотношениями группы вращений, пространство В9 *неявно сферически симметрично*. Это не есть группа вращений вокруг одной точки – пространство не изотропно. Однако наличие этой группы движений позволяет упростить решение ряда физических задач.

Скалярная кривизна

$$R = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{a^2}{b^2 c^2} + \frac{b^2}{a^2 c^2} + \frac{c^2}{a^2 b^2} \right) \quad (2.22)$$

одинакова во всех точках пространства.

## Глава 2

# Теория глобального времени

### 3.1 Время и пространство

Теория глобального времени исходит из уже заявленной во Введении физической концепции пространства и времени:

**Пространство** является материальным носителем геометрических свойств. Оно трехмерно.

**Глобальное время** – это собственное время пространства, единое для всех его точек. Оно всюду и всегда течет одинаково равномерно, само являясь мерой равномерности.

Пространство является *носителем геометрических свойств*, потому что геометрические свойства определяются метрическим тензором, шесть компонент которого являются главными полевыми переменными пространства.

Тела движутся в пространстве, динамика полей (например, электромагнитного) совершается в пространстве. Для каждой движущейся точки определена *абсолютная скорость* относительно пространства.

Относительно пространства существует абсолютное движение, или, наоборот, в некоторой системе координат существует поле скоростей пространства. Таким образом динамика пространства описывается шестью компонентами поля метрического тензора  $\gamma_{ij}(x, t)$ , определяющего его геометрические свойства в заданный момент времени, и тремя компонентами поля абсолютных скоростей  $V^i(x, t)$ , определяющими, как каждая точка пространства в каждый данный момент движется относительно выбранной системы координат.

Пространство является *материальным* носителем геометрических свойств, потому что уравнения динамики метрического тензора и поле скоростей получаются из лагранжевых уравнений и наряду с другими полями (например, электромагнитным) определяют энергию.

Нашей задачей теперь является установление уравнений, определяющих динамику пространства. Чтобы выполнить эту задачу, мы посмотрим, как строятся динамические уравнения уже хорошо изученных полей, прежде всего – электромагнитного.

## 3.2 Физические поля

Одним из хорошо известных физических полей является электромагнитное поле. В каждый момент времени в каждой точке пространства определены поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , связанные друг с другом и своими производными *уравнениями Максвелла*. Проявляются они в определенном воздействии на заряженные частицы.

Если в пространстве задана система координат  $x^i$ , то формально можно полагать электромагнитное поле заданным, если заданы поля  $\mathbf{E}(x^i)$ ,  $\mathbf{H}(x^i)$ . Изменение их во времени определяется уравнениями Максвелла.

В локальной области инерциальной системы можно ввести декартовы координаты (локально декартовы координаты) с метрическим тензором в виде единичной матрицы (с точностью до вторых производных). В этой малой области (точно – бесконечно малой) уравнения всех полей, в том числе и электромагнитного, описываются как в классической физике в плоском пространстве в инерциальной системе в отсутствие поля тяготения. Этот физический принцип называется *принципом эквивалентности*. Название, идущее из общей теории относительности, не надо расшифровывать – что чему экви-

валентно. Физическое его содержание сформулировано, а название укрепило исторически.

Переход к глобальным координатам и неинерциальной системе наблюдателя чисто технически совершается за счет замены производных по пространственным координатам на ковариантные производные, а производных по времени – на ковариантные производные по времени с учетом тензорной структуры рассматриваемых полей.

### 3.3 Принцип наименьшего действия

В классической теории поля уравнения динамики выводятся из вариационного принципа, определяемого через функционал действия, представляющего из себя интеграл по пространству и времени от разности кинетической и потенциальной энергий.

#### 3.3.1 Электродинамика

Например, уравнения электродинамики (в плоском пространстве) выводятся из минимума функционала

$$S_E = \int \frac{\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2}{8\pi} d_3x dt. \quad (3.1)$$

Электрическая часть этого интеграла представляет кинетическую энергию, а магнитная – потенциальную со знаком "минус".

В вариационном принципе поля  $\mathbf{E}(x^i)$  и  $\mathbf{H}(x^i)$  полагаются не независимыми, а производными от потенциалов – скалярного  $\phi(x^k, t)$  и векторного  $\mathbf{A}(x^k, t)$ :

$$\mathbf{H} = \text{rot}(\mathbf{A}); \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}. \quad (3.2)$$

Электрическое поле  $\mathbf{E}$  определяет скорость изменения векторного потенциала  $\mathbf{A}$ , и квадрат этой величины определяет плотность *кинетической энергии* электромагнитного поля. Магнитное поле  $\mathbf{H}$  вычисляется только по распределению векторного потенциала в пространстве в заданный момент времени, и квадрат его определяет плотность *потенциальной энергии* электромагнитного поля.

Таким образом, действие (3.1) является функционалом от электромагнитных потенциалов, рассматриваемых как *первичные функции*, а не от полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ .

Особую роль в электродинамике играет скалярный потенциал  $\phi$ . Его производная по времени не входит ни в электромагнитные поля, ни в действие. Такие компоненты полей называются *нединамическими*.

Наличие этого поля связано с *калибровочной инвариантностью* электродинамики: *калибровочные преобразования* потенциалов с помощью *калибровочной функции*  $\chi(x^k, t)$

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}; \quad \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla \chi \quad (3.3)$$

не меняют ни полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  (3.2), ни, следовательно, действия (3.1). Это значит, что найдя из вариационных уравнений *экстремаль*, из нее можно построить бесконечно много других экстремалей с помощью калибровочного преобразования (3.3).

Нединамичность скалярного потенциала приводит к ряду следствий.

- Используя калибровочное преобразование (3.3), можно найти такую калибровочную функцию, чтобы  $\phi$  равнялось нулю, по крайней мере, в конечной области пространства и на конечном отрезке времени. Поле  $\tilde{\mathbf{A}}$  в этой калибровке назовем *инвариантным векторным полем*. При калибровочном преобразовании (3.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \tilde{\mathbf{A}} + \nabla \chi; & \phi &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}; \\ \mathbf{E} &= -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} - \nabla \chi) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{A}}. \end{aligned}$$

Таким образом, калибровочный потенциал  $\phi$  служит для инвариантного определения производной по времени от векторного потенциала в любой калибровке. Он входит *только* в кинетическую энергию.

- Так как действие оказалось инвариантным по отношению к калибровочным преобразованиям, значит вариация действия по калибровочной функции – по вариации потенциалов, определяемой вариацией калибровочной функции – должна обращаться

в нуль тождественно. Это приводит к *тождеству* в уравнениях Максвелла.

- При переходе к гамильтонову описанию электродинамики импульс, сопряженный трехмерному векторному потенциалу (напряженность  $\mathbf{E}$ ), определяется значением при  $\phi = 0$ .

Попытаемся теперь аналогичным способом построить динамику трехмерного пространства.

### 3.4 Динамика пространства

Само пространство в некоторой системе координат задается метрическим тензором  $\gamma_{ij}(x^k)$  и полем абсолютных скоростей  $V^i(x^k)$ . Если определить уравнения, позволяющие вычислить динамику этих полей с течением времени, то формально пространство окажется многокомпонентным полем, стоящим в одном ряду, например, с электромагнитным.

Динамика пространства в ТГВ выводится аналогично уравнениям электродинамики из вариационного принципа. Лагранжиан представляется как разность кинетической и потенциальной энергий. Лагранжиан должен быть скаляром, а интегрирование должно вестись по инвариантной мере в пространстве  $\sqrt{\gamma} d_3x$ .

#### 3.4.1 Действие динамического пространства

В электродинамике кинетическая энергия квадратична по первым производным векторного потенциала по времени. Квадратичная кинетическая энергия является простейшим видом, приводящим к нетривиальным уравнениям.

В динамике пространства также будем исходить из этого простейшего вида – кинетической энергии, квадратичной по скоростям изменения компонент метрики. Введем тензор скоростей деформации пространства:

$$\mu_{ij} = \frac{1}{2c} D_t \gamma_{ij} = \frac{1}{2c} (\dot{\gamma}_{ij} + V_{i;j} + V_{j;i}). \quad (3.4)$$

Поле абсолютных скоростей  $V^i$  входит в действие и может входить в него только через этот тензор. Это симметричный тензор второго ранга, по которому можно создать один линейный и один квадратичный инвариант:

$$\mu = \gamma^{ij} \mu_{ij}; \quad K = \gamma^{ik} \gamma^{jl} \mu_{ij} \mu_{kl},$$

причем квадрат линейного также квадратичен по  $\mu_{ij}$ , поэтому квадратичная кинетическая энергия представима в виде:

$$T = \frac{c^4}{16\pi k} \int (\alpha K - \beta \mu^2) \sqrt{\gamma} d_3 x,$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – неизвестные безразмерные константы, а общий множитель подставлен из соображений размерности, а также из физического представления о том, что в него должна входить гравитационная постоянная  $k$ . Статическая энергия гравитационного поля отрицательна – из этого следует гравитационное притяжение тел. В то же время экспериментально обнаружено (Тейлор и Халс, Нобелевская премия 1993 года), что гравитационное излучение уносит положительную энергию. Поэтому гравитационная энергия в целом законоопределенна, что обеспечивается знаком минус между двумя слагаемыми.

Процесс подбора лагранжиана никогда не является однозначным, это рекурсивный процесс: сначала выбираются произвольные допустимые константы, затем ищутся решения, а затем из анализа физического смысла полученных решений по возможности эти константы конкретизируются. Этот процесс приводит к значениям констант  $\alpha = 1$  и  $\beta = 1$ , и кинетическая энергия квадратична по производным от компонент метрики по времени:

$$T = \frac{c^4}{16\pi k} \int (\mu_j^i \mu_i^j - (\mu_j^j)^2) \sqrt{\gamma} d_3 x, \quad (3.5)$$

при этом множитель перед интегралом обеспечивает размерность энергии  $kg m^2 s^{-2}$  ( $k$  – гравитационная постоянная с размерностью  $kg^{-1} m^3 s^{-2}$ , а  $\mu$  имеет размерность  $m^{-1}$ ).

Потенциальная энергия, содержащая производные от компонент метрического тензора по координатам, может выражаться лишь через скалярную кривизну пространства  $R$ :

$$S = \frac{c^4}{16\pi k} \int (\mu_j^i \mu_i^j - (\mu_j^j)^2 + R) \sqrt{\gamma} d_3 x dt + S_m, \quad (3.6)$$

где  $S_m$  – действие прочей материи. В уравнения динамики от него войдут компоненты тензора энергии - импульса.

### 3.4.2 Безразмерная запись

В теоретической физике принято пользоваться предельно простой системой единиц – пусть не очень удобной для расчета эксперимента, но предельно упрощающей формулы. Наиболее популярной является *планковская система единиц*, в которой в классических задачах используются *относительные единицы*:

- скорость света  $c = 1$  – время измеряется в метрах; метр времени – это время, за которое свет проходит расстояние 1 метр; при переходе в обычную систему, например в СИ, нужно время в метрах делить на значение скорости света в данной системе.
- $8\pi k = 1$  – масса ( $m$ ) тоже измеряется в метрах; при возврате в размерную систему единиц масса в килограммах ( $M$ ) (с учетом и времени в секундах) находится из соотношения

$$M = m \frac{c^2}{8\pi k}.$$

- Энергия, как и масса, также выражается в метрах ( $e$ ). Энергия в джоулях ( $E$ ) восстанавливается из энергии в метрах по формуле

$$E = e \frac{c^4}{8\pi k}.$$

В квантовомеханических задачах появляется постоянная Планка  $\hbar$ , имеющая размерность энергия-время, но так как каждый из сомножителей выражается в метрах, то в относительных единицах размерность  $\hbar$  – квадратные метры. Тем самым квантовомеханические задачи можно полностью обезразмерить, положив  $\hbar = 1$ , введя тем самым планковскую единицу длины  $l_0$  из соотношения

$$\hbar = \frac{c^3}{8\pi k} l_0^2; \quad l_0 = \sqrt{\frac{8\pi k \hbar}{c^3}}.$$

При этом и длины, и время, и массы, и энергии будут безразмерные – их значения в метрах выражаются в долях  $l_0$  (будем их

обозначать теми же символами, но с чертой сверху). Возврат к размерным единицам проводится из соотношений:

$$\begin{aligned} l &= \bar{l} \cdot l_0 = \bar{l} \sqrt{\frac{8\pi k \hbar}{c^3}}; \\ E &= \bar{E} \frac{c^4}{8\pi k} l_0 = \bar{E} c^2 \sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi k}}; \\ M &= \bar{M} \sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi k}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В дальнейшем мы будем работать в относительных единицах в классических задачах и в безразмерном виде в квантовомеханических, пересчитывая в размерные величины по вышеприведенным формулам.

### 3.4.3 Динамические уравнения

В относительных единицах действие (3.6) имеет вид:

$$S = \frac{1}{2} \int (\mu_j^i \mu_i^j - (\mu_j^j)^2 + R) \sqrt{\gamma} d_3 x dt + S_m, \quad (3.8)$$

Абсолютные скорости  $V^i$  входят только в кинетическую часть действия. Введя импульсы

$$\pi_j^i = \frac{\sqrt{\gamma}}{2} (\mu_j^i - \delta_j^i \mu_s^s),$$

варьируя действие по шести компонентам пространственной метрики, получим шесть уравнений динамики

$$\dot{\pi}_j^i = b_j^i + \sqrt{\gamma} G_j^i + \sqrt{\gamma} Q_j^i, \quad (3.9)$$

где  $b_j^i$  назовем *собственным тензорным током*

$$b_j^i = -\delta_j^i \frac{\sqrt{\gamma}}{2} (\mu_l^k \mu_k^l - \mu_k^k \mu_l^l) - \partial_s (V^s \pi_j^i) + V^i{}_{,s} \pi_j^s - V^s{}_{,j} \pi_s^i,$$

$G_j^i$  – тензор Эйнштейна пространства (трехмерного), а  $Q_j^i$  – внешний ток, получающийся вариацией действия прочей (вложенной) материи по метрическому тензору пространства – *внешний тензорный ток*.

### 3.4.4 Уравнения связи

Вариация по трем компонентам поля абсолютных скоростей  $V^i$  дает три уравнения связи:

$$\nabla_i \pi_j^i = \partial_i \pi_j^i - \Gamma_{jk}^i \pi_i^k = \sqrt{\gamma} J_j. \quad (3.10)$$

Эти уравнения линейны по скоростям  $V^i$  и их можно переписать в виде:

$$\frac{1}{2} \nabla^i \dot{\gamma}_{ij} - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_j \dot{\sqrt{\gamma}} + R_{ij} V^i + \frac{1}{2} \nabla^i (V_{i,j} - V_{j,i}) = J_j. \quad (3.11)$$

Правая часть уравнений – *векторный источник* – получается вариацией действия прочей материи по полю скоростей, которое и для других полей входит только в производную по времени, то есть вариацией только кинетической энергии этих полей.

### 3.4.5 Теорема о вириале пространства

Свернув по индексам уравнение (3.9) и обозначив свертку  $\pi_i^i \equiv \pi$ , в отсутствие внешнего тока (для чистой гравитации) получим

$$\dot{\pi} + \partial_s (V^s \pi) = -3T - \frac{1}{2} R \sqrt{\gamma} = -3T + U, \quad (3.12)$$

где  $T$  – плотность кинетической энергии, а  $U$  – потенциальной. Теорема о вириале применима к почти стационарным полям в области, на границе которой  $V^n = 0$  – отсутствуют потоки через границу. Усреднив (3.12) по времени, получим соотношение между средней потенциальной  $T$ , кинетической  $U$  и полной  $E$  энергиями:

$$U = 3T; \quad E = T + U = 4T. \quad (3.13)$$

При упомянутых условиях кинетическая энергия, а следовательно, и полная положительна.

Для определения кинетической энергии нужно знать поле абсолютных скоростей в рассматриваемой области, информацию о котором, например, в динамике Космоса могут дать видимые звезды, а теорема о вириале позволяет вычислить полную энергию.

### 3.4.6 Тождества Гильберта

С помощью преобразований координат мы можем так или иначе изменить метрический тензор. Например, любая двумерная метрика может быть приведена к конформно плоскому виду (метрика плоского пространства, умноженная на какую-то функцию координат). Трехмерная метрика (в конечной области) может быть, например, диагонализирована – приведена к *триортгональному* виду. Однако для поддержания такого вида в последующие моменты времени, если метрика меняется, придется непрерывно проводить преобразования координат, зависящие от времени, приводящее к появлению поля скоростей.

Использование трех координатных преобразований для уменьшения динамических компонент метрического тензора приводит к некоторому избытку числа уравнений над числом динамических переменных. Это значит, что уравнения подчиняются некоторым тождествам.

Эти тождества в самом общем математическом смысле были найдены Давидом Гильбертом [5]. Пусть имеется функционал, зависящий от метрического тензора  $\gamma_{ij}$  и, возможно, от каких-то других полей  $y^\alpha$ , но вариация функционала по этим полям равна нулю. Это может быть действие для полей  $y^\alpha$ , и равенство нулю вариаций по этим полям тогда означает выполнение динамических уравнений по этим полям. В вариации функционала

$$\delta S[y^\alpha, \gamma_{ij}] = \int \left( \frac{\delta S}{\delta y^\alpha} \delta y^\alpha + \frac{\delta S}{\delta \gamma_{ij}} \delta \gamma_{ij} \right) \sqrt{\gamma} d_n x$$

первое слагаемое равно нулю. Если же вариация действия вызвана просто преобразованием координат, то она равна нулю вследствие инвариантности действия, однако второе слагаемое не равно нулю. Обозначим

$$\frac{\delta S}{\delta \gamma_{ij}} \equiv B^{ij}.$$

Вариация метрического тензора при преобразованиях координат  $\delta x^i = \xi^i(x)$  – Ли - вариация:

$$\delta \gamma_{ij} = -(\xi_{i;j} + \xi_{j;i}).$$

Подставляя ее в вариацию функционала и интегрируя по частям, получим

$$0 = \int 2 B^{ij} \xi_{i;j} \sqrt{\gamma} d_n x = 2 \int (\nabla_j (B^{ij} \xi_i) - \xi_i \nabla_j B^{ij}) \sqrt{\gamma} d_n x.$$

Первое слагаемое по теореме Гаусса переходит в поверхностный интеграл, а необходимость равенства нулю вклада в вариацию от второго при произвольности в каждой точке вариации  $\xi^i$  приводит к тождеству Гильберта

$$\nabla_i \left( \frac{\delta S}{\delta \gamma_{ij}} \right) = 0. \quad (3.14)$$

В частности, для функционала Гильберта

$$S_H = -\frac{1}{2} \int R \sqrt{\gamma} d_n; \quad \frac{\delta S}{\delta \gamma_{ij}} = \frac{1}{2} G^{ij},$$

где  $R$  – скалярная кривизна  $n$ -мерного пространства, а  $G^{ij} = R^{ij} - R \gamma^{ij}/2$  – тензор Эйнштейна, в любой размерности тождества Гильберта принимают вид:

$$\nabla_i G_j^i = \nabla_i R_j^i - \frac{1}{2} R_{,j} = 0. \quad (3.15)$$

Это тождество выполняется для вариации потенциальной энергии трехмерного пространства и в статическом случае – для вариации кинетической энергии при отсутствии других полей

$$\nabla_i b_j^i = 0, \quad (3.16)$$

а при наличии других полей – это относится к вариации по метрическому тензору кинетической энергии всех полей, так как туда еще входит поле скоростей  $V^i$ , но вариация по нему полной кинетической энергии равна нулю.

### 3.4.7 Гамильтониан

Гамильтониан стандартным путем получается из лагранжиана:

$$H = \int \pi^{ij} \dot{\gamma}_{ij} d_3 x - L =$$

$$\int \left( \frac{2\pi_j^i \pi_i^j - (\pi_i^i)^2}{\sqrt{\gamma}} - \frac{1}{2} R \sqrt{\gamma} - 2\pi_j^i V_{;i}^j \right) d_3x. \quad (3.17)$$

Важной его особенностью является знаконоопределенность, в результате чего оказываются возможными такие явления, как космологическое расширение.

### 3.4.8 Поток энергии

В стандартной теории поля лагранжиан зависит от некоторой (возможно, многокомпонентной) функции  $y^\alpha$  и ее первых производных по времени и координатам  $L(y_\alpha, \dot{y}_\alpha, y_{\alpha;i})$ . Он определяет уравнения динамики поля  $y_\alpha$  через уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial y_\alpha} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_\alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial L}{\partial y_{\alpha;i}} \right) = 0.$$

Эти уравнения определяют *неразрывность потока энергии*:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \dot{y}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_\alpha} - L \right) + \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \dot{y}_\alpha \frac{\partial L}{\partial y_{\alpha;i}} \right) = 0$$

и определяют плотность и поток энергии

$$\epsilon = \dot{y}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_\alpha} - L; \quad U^i = \dot{y}_\alpha \frac{\partial L}{\partial y_{\alpha;i}}, \quad (3.18)$$

удовлетворяющие уравнению неразрывности

$$\partial_t \epsilon + \partial_i U^i = 0. \quad (3.19)$$

Потенциальная часть лагранжиана  $\sqrt{\gamma} R$  содержит не только первые, но и вторые пространственные производные метрического тензора. В этом случае (для произвольного поля  $y_\alpha$ ) уравнения Лагранжа слегка удлиняются:

$$\frac{\partial L}{\partial y_\alpha} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_\alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial L}{\partial y_{\alpha;i}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \left( \frac{\partial L}{\partial y_{\alpha;ij}} \right) = 0$$

и удлиняется выражение для потока энергии

$$U^i = \dot{y}_\alpha \left( \frac{\partial L}{\partial y_{\alpha;i}} - \partial_j \left( \frac{\partial L}{\partial y_{\alpha;ij}} \right) \right) + \dot{y}_{\alpha;j} \frac{\partial L}{\partial y_{\alpha;ij}}. \quad (3.20)$$

В локально декартовых координатах

$$\frac{\partial R\sqrt{\gamma}}{\partial \gamma_{ij,k}} = 0; \quad \frac{\partial R\sqrt{\gamma}}{\partial \gamma_{ij,kl}} = \sqrt{\gamma} (\gamma^{ik}\gamma^{jl} - \gamma^{ij}\gamma^{kl}).$$

Первая составляющая потока равна нулю

$$\frac{\partial R\sqrt{\gamma}}{\partial \gamma_{ij,k}} - \partial_l \left( \frac{\partial R\sqrt{\gamma}}{\partial \gamma_{ij,kl}} \right) = 0,$$

так как первые производные метрического тензора в локально декартовых координатах равны нулю. Вторая часть потока

$$\frac{\partial R\sqrt{\gamma}}{\partial \gamma_{ij,kl}} \dot{\gamma}_{ij,l} = \sqrt{\gamma} (\gamma^{ik}\gamma^{jl} - \gamma^{ij}\gamma^{kl}) 2\mu_{ij,l} = 4\pi^{kl},_{l} = 0,$$

так как обычные производные в локально инерциальной системе переходят в ковариантные производные в произвольной системе, а  $\pi^{kl},_{l} = 0$  – это уравнения связей в вакууме.

Таким образом, полный поток энергии в глобальной инерциальной системе равен нулю и плотность энергии сохраняется локально.

Это есть следствие того, что поток энергии определяется вариацией по полю скоростей, а вариация по нему равна нулю – это уравнения связей.

В неинерциальной системе в кинетической энергии каждого поля  $y_\alpha$  появляются добавки, связанные с ковариантной производной по времени  $\dot{y}_\alpha + V^i y_{\alpha,i} + \dots$ , что приводит к току

$$U^i = V^i \sum_\alpha \frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{y}_\alpha} \dot{y}_\alpha = V^i \sum_\alpha \pi_\alpha \dot{y}_\alpha. \quad (3.21)$$

Если поверхность, через которую определяется поток, неподвижна относительно инерциальной системы, то в системе наблюдателя ее точки движутся со скоростями  $V^i(x)$ , что приводит к добавке в поток каждого поля  $y_\alpha$  величины  $-V^i L_\alpha$ , так что с учетом (3.21) поток через глобально неподвижную поверхность равен

$$J = \sum_\alpha \oint (\pi_\alpha \dot{y}_\alpha - L_\alpha) V^i dS_i = \sum_\alpha \oint \epsilon_\alpha V^i dS_i, \quad (3.22)$$

что также гарантирует сохранение локальной суммарной плотности энергии всех полей, в том числе и пространства.

### 3.4.9 Гравитационный поток

Рассмотрим более подробно выражение для потока энергии пространства, связанное с потенциальной энергией  $W = \int R \sqrt{\gamma} d_3x$ . Сложности с описанием гравитационного потока энергии связаны с произволом выбора системы координат. Если из математических средств выделено только локальное понятие ковариантной производной, то в локально инерциальной системе первые производные всех компонент метрического тензора равны нулю и описание ковариантных потоков, опирающееся на локальную ковариантность, заходит в тупик. В то же время, когда речь идет о потоке энергии через поверхность, нужно определять не локально ковариантные величины, а привязанные к рассматриваемой поверхности.

Как и при определении ковариантной производной, где преобразования координат используются сначала для выбора предельно простой метрики вблизи заданной точки – локально декартовой системы, – для описания геометрии вблизи поверхности нужно предельно упростить метрику вблизи рассматриваемой поверхности.

Выберем одну из трех координат ( $z$ ) так, чтобы уравнение самой поверхности определялось уравнением  $z = 0$ , а метрика вблизи нее

$$dl^2 = dz^2 + \sigma_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta; \quad \alpha, \beta = 1, 2; \quad \sqrt{\gamma} = \sqrt{\sigma}. \quad (3.23)$$

Переменные  $y^1, y^2$  параметризуют саму поверхность.

В этой специальной системе координат вблизи рассматриваемой поверхности (штрихом обозначаем производную по  $z$ )

$$R \sqrt{\gamma}^{(3)} = -(\sqrt{\sigma})'' + \frac{\sqrt{\sigma}}{4} (\sigma^{\alpha\mu} \sigma^{\beta\nu} - \sigma^{\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu}) \sigma'_{\alpha\beta} \sigma'_{\mu\nu} + \sqrt{\sigma} R^{(2)}. \quad (3.24)$$

Первое и последнее (см. ф. (1.31)) слагаемые в этом выражении не дают вклада в уравнения движения и могут быть отброшены. Эффективным выражением для энергии остается

$$W = \int \frac{\sigma'_{11} \sigma'_{22} - (\sigma'_{12})^2}{\sqrt{\sigma}} dy^1 dy^2 dz, \quad (3.25)$$

что приводит к выражению для плотности потока энергии через поверхность

$$U^z = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} (\sigma'_{11} \dot{\sigma}_{22} + \sigma'_{22} \dot{\sigma}_{11} - 2 \sigma'_{12} \dot{\sigma}_{12}). \quad (3.26)$$

Однако при изменяющейся во времени метрике выбрать специальную систему координат вблизи поверхности невозможно. Поэтому рассмотрим связь специальных координат с произвольными, в которых

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial z}{\partial x^i} \frac{\partial z}{\partial x^j} + \sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}.$$

Производная

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial z}{\partial x^j} + \frac{\partial z}{\partial x^i} \frac{\partial^2 z}{\partial x^j \partial x^k} + \sigma_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} + \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^j \partial x^k} \right) + \\ &\quad \left( \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x^k} + \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial y^\mu} \frac{\partial y^\mu}{\partial x^k} \right) \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

Отсюда можно выразить производную по нормали

$$\frac{\partial \sigma_{\mu\nu}}{\partial z} = \frac{\partial x^k}{\partial z} \frac{\partial x^i}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^j}{\partial y^\nu} \left( \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} - \gamma_{jl} \frac{\partial x^l}{\partial y^\alpha} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^i \partial x^k} - \gamma_{il} \frac{\partial x^l}{\partial y^\alpha} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^j \partial x^k} \right). \quad (3.27)$$

Максимальное упрощение общих координат состоит в том, что выделяется одна координата, например,  $x^3$ , задающая уравнение поверхности  $x^3 = x_0^3$ . Тогда из уравнений для специальных координат  $z, y^\alpha$

$$\gamma^{ij} \frac{\partial z}{\partial x^i} \frac{\partial z}{\partial x^j} = 1; \quad \gamma^{ij} \frac{\partial z}{\partial x^i} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j} = 0,$$

при условии  $z = 0$  на поверхности находим при малых  $z$ :

$$z = f(x^3 - x_0^3); \quad y^\alpha = x^\alpha - \tau^\alpha (x^3 - x_0^3),$$

где обозначено

$$\sqrt{\gamma^{33}} \equiv \frac{1}{f}; \quad \frac{\gamma^{3\alpha}}{\gamma^{33}} \equiv \tau^\alpha,$$

откуда из (3.27) получаем *ковариантную производную по нормали*

$$D_z \sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{f} (\sigma_{\alpha\beta,3} + \tau^\mu \sigma_{\alpha\beta,\mu} + \tau^\mu{}_{,\alpha} \sigma_{\mu\beta} + \tau^\mu{}_{,\beta} \sigma_{\alpha\mu}), \quad (3.28)$$

аналогичную введенной раньше ковариантной производной по времени.

Теперь из (3.26) получаем выражение для потока гравитационной энергии:

$$U^n = \frac{\sqrt{\gamma^{33}}}{\sqrt{\gamma}} (\dot{\gamma}_{11} D_z \gamma_{22} + \dot{\gamma}_{22} D_z \gamma_{11} - 2 \dot{\gamma}_{12} D_z \gamma_{12}). \quad (3.29)$$

В самом общем виде поток определяется производными от поперечно-поперечных по отношению к нормали компонент метрики. Он определяет собственно гравитационную часть потока энергии.

### 3.5 Взаимодействие с вложенной материей

Действие прочей (вложенной) материи выражается через тензорные компоненты полей, описывающих эти виды материи, пространственный метрический тензор  $\gamma_{ij}$  и векторное поле глобальной скорости  $V^i$ .

#### 3.5.1 Электромагнитное поле

Электромагнитное поле задается двумя векторными полями  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$ , определяемыми производными от скалярного и векторного потенциалов. Магнитное поле представляется либо как антисимметричный тензор второго ранга, либо как дуальное ему векторное поле:

$$B_{[ij]} = A_{i,j} - A_{j,i} = \epsilon_{[ijk]} B^k;$$

$$B^i = \epsilon^{[ijk]} A_{j,k} = \frac{\epsilon^{[ijk]}}{2} (A_{j,k} - A_{k,j}).$$

В определение напряженности электрического поля входит производная по времени от векторного потенциала, которая должна быть представлена как ковариантная производная по времени:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_i &= -\partial_i \phi - D_t A_i = -\partial_i \phi - \partial_t A_i - V^j A_{i,j} - A_j V^j{}_{,i} = \\ &= -\partial_i (\phi + V^j A_j) - \partial_t A_i - V^j B_{[ij]} = \\ &= -\partial_i \phi_V - \partial_t A_i - V^j \epsilon_{ijk} B^k = E_i - V^j \epsilon_{ijk} B^k. \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$E_i = -\partial_i \phi_V - \partial_t A_i.$$

В неинерциальной системе роль скалярного потенциала играет конструкция

$$\phi_V = \phi + V^i A_i. \quad (3.31)$$

Калибровочное преобразование скалярной функцией  $\chi$  также требует введения ковариантных производных по времени:

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} - V^j \chi_{,j}; \quad \tilde{A}_i = A_i + \chi_{,i}.$$

При этом преобразование  $\tilde{\phi}_V = \phi_V - \dot{\chi}$  гарантирует неизменность **E** и **B**.

В уравнениях Максвелла корректируются производные по времени, заменяясь на ковариантную. В первой паре:

$$\frac{\partial B_{ki}}{\partial c t} + V^j B_{[ki],j} + B_{[kj]} V^j_{,i} - B_{[ij]} V^j_{,k} + (E_{k,i} - E_{i,k}) = 0. \quad (3.32)$$

Полный лагранжиан электромагнитного поля

$$\begin{aligned} L = & \frac{\sqrt{\gamma}}{32\pi} \left( 4\gamma^{ij} \tilde{E}_i \tilde{E}_j - (\gamma^{ij}\gamma^{kl} - \gamma^{kj}\gamma^{il}) B_{ik} B_{jl} \right) = \\ & \frac{\sqrt{\gamma}}{8\pi} \left( \gamma^{ij} E_i E_j + 2\gamma^{ij} V^k E_i B_{kj} + \gamma^{ij} V^k V^l B_{ik} B_{jl} - \right. \\ & \left. \frac{1}{4} (\gamma^{ij}\gamma^{kl} - \gamma^{kj}\gamma^{il}) B_{ik} B_{jl} \right) \end{aligned} \quad (3.33)$$

квадратичен по напряженностям электрического и магнитного полей.

Поле абсолютных скоростей в лагранжиан электромагнитного поля входит только через кинетическую энергию.

Вторая пара уравнений Максвелла определяется из вариации действия после введения вектора электрической

$$D^i = \frac{4\pi}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial L}{\partial E_i} = \gamma^{ij} (E_i + V^k B_{kj}) = \gamma^{ij} \tilde{E}_j$$

и магнитной индукции

$$H^{[ij]} = -\frac{4\pi}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial L}{\partial B_{[ij]}} =$$

$$\begin{aligned}
 & (\gamma^{ik} \gamma^{jl} + \gamma^{il} V^j V^k - \gamma^{jl} V^i V^k) B_{[kl]} - (V^i \gamma^{jk} - V^j \gamma^{ik}) E_k. \\
 & \frac{\partial D^i}{\partial c t} + 2 \partial_j H^{[ij]} = 0; \\
 & \epsilon^{[ijk]} H_{j,k} - \frac{\partial D^i}{\partial c t} - V^j D_{;j}^i - D^j V_{;j}^i = 0. \tag{3.34}
 \end{aligned}$$

Связь с уравнениями гравитационной динамики

$$\begin{aligned}
 & \gamma^{ij} E_j A_{i,k} - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_i (\sqrt{\gamma} E^i A_k) = \\
 & J_k^{(E)} = \frac{\delta S_E}{\delta V^k} = \frac{\sqrt{\gamma}}{4\pi} \gamma^{ij} (E_i B_{kj} + B_{ik} B_{jl} V^l). \tag{3.35}
 \end{aligned}$$

Выражение (3.35) – это поток энергии электромагнитного поля, определяющий векторный источник в уравнениях связи (3.11).

Тензорный источник в динамических уравнениях (3.9) получается вариацией электромагнитного действия с лагранжианом (3.33) по метрическому тензору пространства:

$$-Q_{ij} = \frac{\delta S_E}{\delta \gamma^{ij}}. \tag{3.36}$$

В четырехмерном обозначении векторный и тензорный токи вместе с плотностью энергии объединяются в тензор энергии - импульса материи.

### 3.5.2 Пылевидная материя

В космологии представляет интерес пылевидная материя с четырехмерным тензором энергии-импульса

$$T_{\beta}^{\alpha} = \rho u^{\alpha} u_{\beta},$$

где  $u^{\alpha}$  – 4-вектор скорости.

Во все компоненты 4-вектора скорости входит нормировочный множитель

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\gamma_{ij}}{c^2} (\dot{x}^i - V^i)(\dot{x}^j - V^j)}}.$$

Контравариантные компоненты скорости движущейся свободной частицы:

$$u^0 = \lambda; \quad u^i = \lambda \frac{\dot{x}^i}{c}.$$

Ковариантные компоненты ее:

$$u_0 = \lambda \left(1 + \frac{\gamma_{ij}}{c^2} (\dot{x}^i - V^i) V^j\right); \quad u_i = -\lambda \frac{\gamma_{ij}}{c} (\dot{x}^i - V^i).$$

При этом

$$u^0 u_0 + u^i u_i = 1.$$

Векторный источник в уравнениях связи

$$J_i = T_i^0 = \rho u^0 u_i = -\rho c \frac{\gamma_{ij} (\dot{x}^j - V^j)}{c^2 - \gamma_{kj} (\dot{x}^k - V^k) (\dot{x}^j - V^j)} \quad (3.37)$$

и тензорный в динамических уравнениях

$$J_j^i = T_j^i - V^i T_j^0 = -\rho \frac{(\dot{x}^i - V^i) \gamma_{jk} (\dot{x}^k - V^k)}{c^2 - \gamma_{kj} (\dot{x}^k - V^k) (\dot{x}^j - V^j)} \quad (3.38)$$

определяются абсолютной скоростью движущейся частицы относительно пространства  $\dot{x}^i - V^i$ .

*Когерентные частицы* – покоящиеся относительно пространства – не дают вклада в источники. Чтобы частица работала как источник в уравнениях пространства, она должна быть некогерентной – иметь ненулевую абсолютную скорость  $\dot{x}^i - V^i$ .

### 3.5.3 Идеальная релятивистская жидкость

В ТГВ специальная теория относительности включается локально: в бесконечно малом пространстве и время метризованы метрикой Минковского. При нахождении решений динамики пространства этот факт не играет никакой роли, так как пространство – распределенный объект и его описание проводится в глобальном времени.

Однако динамика полей, определяемых локальными уравнениями, должна быть локально релятивистски инвариантна. Уравнение Гамильтона - Якоби для свободной частицы

$$\frac{1}{c^2} (\dot{S} + V^i S_{,i})^2 - \gamma^{ij} S_{,i} S_{,j} = m^2 c^2 \quad (3.39)$$

может быть переписано в четырехмерном виде:

$$g^{\alpha\beta} S_{,\alpha} S_{,\beta} = m^2 c^2, \quad (3.40)$$

где компоненты четырехмерной метрики выражаются через трехмерную метрику и поле абсолютных скоростей.

Идеальная релятивистская жидкость описана Шютцем [4]. В основе ее лежит выражение для энтальпии, определяемой функцией  $\sigma$ :

$$\mu = \sqrt{g^{\alpha\beta} \sigma_{,\alpha} \sigma_{,\beta}}. \quad (3.41)$$

Уравнение состояния определяется зависимостью давления от энтальпии  $p(\mu)$ , при этом плотность вещества  $\rho$ , плотность энергии  $\varepsilon$  определяются через эту зависимость:

$$\rho = \frac{dp}{d\mu}; \quad \varepsilon = \mu \frac{dp}{d\mu} - p; \quad \varepsilon + p = \rho \mu; \quad d\varepsilon = \mu d\rho. \quad (3.42)$$

Уравнения изоэнтропной динамики жидкости определяются из принципа наименьшего действия

$$S_f = \int p(\mu) \sqrt{g} d_4x. \quad (3.43)$$

Вариация по  $\sigma$  приводит к закону сохранения вещества:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{dp}{d\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \sigma_{,\alpha}} \right) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\rho u^\alpha) = 0; \quad u^\alpha = \frac{\partial \mu}{\partial \sigma_{,\alpha}}.$$

Тензор энергии-импульса жидкости определяется вариацией по метрическому тензору:

$$T_{ij} = 2 \frac{\delta S_f}{\delta g^{ij}} = 2 \frac{dp}{d\mu} \frac{\partial \mu}{\partial g^{ij}} + 2 \frac{p}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial g^{ij}} = (\varepsilon + p) u_i u_j - p g_{ij}. \quad (3.44)$$

В глобальном времени выражение для энтальпии

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{c^2} (\dot{\sigma} + V^i \sigma_{,i})^2 - \gamma^{ij} \sigma_{,i} \sigma_{,j}} \quad (3.45)$$

определяет поле скоростей жидкости

$$u^0 = \frac{\partial \mu}{\partial \sigma_{,t}} = \frac{1}{\mu} (\dot{\sigma} + V^i \sigma_{,i});$$

$$u^i = \frac{\partial \mu}{\partial \sigma_{,i}} = \frac{1}{\mu} (\dot{\sigma} V^i + (V^i V^j - \gamma^{ij}) \sigma_{,j}). \quad (3.46)$$

Особо выделим случай статической жидкости  $u^i = 0$ . При этом  $\sigma = k(t + s(x))$ . Отсюда

$$V^i + (V^i V^j - \gamma^{ij}) s_{,j} = 0; \quad s_i = \frac{V_i}{1 - V^2};$$

$$\mu = \frac{k}{\sqrt{1 - V^2}}. \quad (3.47)$$

Константа  $k$  – гравитационного равновесия – постоянна по всему телу. Энтальпия (с точностью до этой константы) в равновесии *однозначно определяется параметрами пространства: полем скоростей и метрикой*. Видимо, без потери общности можно принять  $k = 1$ .

Соотношение (3.47) ставит в однозначное соответствие состояние равновесной жидкости в данной точке с характеристиками пространства в этой точке.

Вариация действия статической жидкости по полю скоростей определяется только вариацией давления

$$\frac{\delta S_f}{\delta V^i} = \frac{dp}{d\mu} \frac{\partial \mu}{\partial V^i} = \frac{\rho V_i}{(1 - V^2)^{3/2}} = \frac{(\varepsilon + p) V_i}{1 - V^2}. \quad (3.48)$$

Вариация по метрическому тензору пространства

$$\frac{\delta S_f}{\delta \gamma_{ij}} = \frac{dp}{d\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{p}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial \gamma_{ij}} = \frac{\rho V^i V^j}{2(1 - V^2)^{3/2}} + \frac{p}{2} \gamma^{ij} =$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{(\varepsilon + p) V^i V^j}{1 - V^2} + p \gamma^{ij} \right) \quad (3.49)$$

определяют тензорный ток.

## Глава 3

# Решения

### 4.1 Сферически-симметричные пространства

Несмотря на то, что инерциальная система всегда динамична, существуют решения в глобальном времени, стационарные с точки зрения некоторой неинерциальной системы.

В сферически-симметричном стационарном случае метрика пространства приводится к виду:

$$dl^2 = dr^2 + R^2(r)(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (4.1)$$

а поле скоростей радиально:  $V^r = V(r)$ .

Так как поле скоростей входит только в кинетическую энергию, для получения уравнений связи достаточно расписать только кинетическую энергию. Поле скоростей деформации метрики, несмотря на отсутствие зависимости от времени, вследствие наличия поля скоростей отлично от нуля (штрихом обозначена производная по радиусу):

$$\mu_{11} = \frac{1}{2} (\dot{\gamma}_{11} + 2V' \gamma_{11} + V \gamma'_{11}) = V'; \quad \mu_1^1 = V';$$

$$\begin{aligned}\mu_{22} &= \frac{1}{2} (\dot{\gamma}_{22} + V \gamma'_{22}) = V R R'; \quad \mu_2^2 = V \frac{R'}{R} = \mu_3^3. \\ T &= \frac{1}{2} \left( \left( (V')^2 + 2 \left( V \frac{R'}{R} \right)^2 \right) - \left( V' + 2 V \frac{R'}{R} \right)^2 \right) R^2 = \\ &\quad - 2 V V' R R' - V^2 R'^2.\end{aligned}\quad (4.2)$$

Из уравнений связи нетривиально лишь радиальное, получающееся из (4.2) вариацией по  $V$ :

$$\frac{\delta T}{\delta V} = - \left( \frac{\partial T}{\partial V'} \right)' + \frac{\partial T}{\partial V} = 2 V R R'' = 0,$$

откуда  $R = ar + b$ . Требование несингулярности метрики при  $r \rightarrow 0$  приводит к  $R = r$  и пространство оказывается плоским, поэтому потенциальную энергию и не надо вычислять – лагранжиан равен кинетической энергии.

#### 4.1.1 Поле сферической массы

Для вычисления токов лучше использовать средства компьютерных аналитических вычислений, например, описанные в разделе 10.3 для пакета Mathematica.

Из динамических уравнений не равны нулю  $q_1^1$ ,  $q_2^2 = q_3^3$ , однако при выполнении первого уравнения второе выполняется автоматически вследствие тождеств Гильберта. Компонента

$$q_1^1 = \frac{V(2rV' + V)}{r^2} = \frac{(rV^2)'}{r^2}\quad (4.3)$$

в вакууме равна нулю, откуда

$$rV^2 = \text{const} \equiv 2kM \geq 0,$$

где  $k$  – абсолютная константа – гравитационная постоянная, а  $M$  – константа интегрирования может трактоваться как масса тела в центре, причем она должна быть неотрицательной (в то время как в ОТО вопрос о неотрицательности массы оброс многими искусственными гипотезами – отсутствие “голых сингулярностей” и пр.)

Радиальное поле скоростей – “поле Бьерна”

$$V^r = V = \sqrt{\frac{2kM}{r}} \quad (4.4)$$

делает это пространство неинерциальным и отличает от инерциального евклидова пространства.

#### 4.1.2 Поле заряженной частицы

При наличии сферически-симметричного электростатического поля в уравнение (4.3) добавится компонента  $T_1^1$  тензора энергии-импульса этого поля

$$q_1^1 = \frac{(rV^2)'}{r^2} = -\frac{q^2}{r^4},$$

откуда

$$V = \sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{q^2}{r^2}} \quad (4.5)$$

при плоском пространстве.

Как и для вакуумного решения (4.4), это решение имеет плотность энергии всюду равную нулю.

#### 4.1.3 Нестационарное поле скоростей вакуума

Наиболее простое нестатическое сферически симметричное решение с плоским пространством без источников определяется единственным уравнением

$$\frac{\partial V}{\partial t} + VV' + \frac{V^2}{2r} = 0. \quad (4.6)$$

Можно выбрать  $V$  в виде  $V(r, t) = k(t)r$ , тогда уравнение (4.6) сводится к дифференциальному уравнению первого порядка на  $k(t)$

$$\dot{k} + \frac{3}{2}k^2 = 0; \quad k = \frac{2}{3t}; \quad V(r, t) = \frac{2r}{3t}.$$

Его можно переписать в векторном виде:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \frac{2\mathbf{r}}{3t}, \quad (4.7)$$

инвариантно относительно переноса центральной точки. Вычислим поле скоростей в двух точках  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ :

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}(\mathbf{r}_1, t) = \frac{2\mathbf{r}_1}{3t}; \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}(\mathbf{r}_2, t) = \frac{2\mathbf{r}_2}{3t}$$

и вычислим их разность

$$\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1 = \frac{2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{3t},$$

повторяющую формулу (4.7), как если бы центром была точка  $\mathbf{r}_1$ . Таким образом, несмотря на сферическую симметрию, решение оказывается однородным.

## 4.2 Космологические задачи

Наиболее простыми решениями ТГВ являются космологические модели, где динамические переменные зависят только от времени, то есть с точки зрения механики – это задачи с конечным числом степеней свободы, а не задачи теории поля.

Эти задачи описываются в глобальной инерциальной системе, где поле абсолютных скоростей равно нулю всюду.

### 4.2.1 Динамика плоского мира

Пространство плоское, однако расстояние между точками его может меняться за счет глобального масштаба  $m(t)$ , который может изменяться с течением времени:

$$dl^2 = m^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2); \quad \sqrt{\gamma} = m^3. \quad (4.8)$$

Скалярная кривизна, определяющая потенциальную энергию пространства, равна нулю, поэтому гамильтониан определяется только кинетической энергией:

$$\mu_j^i = \frac{\dot{m}}{m} \delta_j^i; \quad \mu = 3 \frac{\dot{m}}{m}; \quad H = \frac{m^3}{2} (\mu_j^i \mu_i^j - \mu^2) = -3 \dot{m}^2 m.$$

Динамику масштаба можно определить из закона сохранения энергии:

$$-3 \dot{m}^2 m = -\frac{4}{3} a^3; \quad m = a t^{2/3}.$$

Плотность энергии всюду отрицательна.

Приведем метрику (4.8) к сферическим координатам:

$$dl^2 = m^2(t) (dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)) = \\ m^2 dr^2 + R^2(r, t) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2); \quad R(r, t) = m(t) r.$$

Перейдем теперь от переменной  $r$  к переменной  $R$ :

$$dR = m dr + \frac{\dot{m}}{m} R dt; \quad m dr = dR - \frac{\dot{m}}{m} R dt$$

и обозначим

$$\frac{\dot{m}}{m} R = \frac{2R}{3t} \equiv V,$$

после чего метрика становится евклидовой, неизменной во времени, а поле скоростей принимает вид (4.7).

Одна и та же задача решена в различных координатах.

#### 4.2.2 Динамика сферического мира

Очень интересной является космологическая модель трехмерной сферы с радиусом, зависящим от времени. Геометрические свойства трехмерной сферы были изложены в разделе 1.3.1 “Трехмерная сфера”. Метрика пространства

$$dl^2 = r^2(t) d\sigma_3^2,$$

где  $d\sigma_3^2$  – метрика на трехмерной сфере единичного радиуса (1.36), определяет кинетическую энергию, пропорциональную

$$T = -3 \left( \frac{\dot{r}}{r} \right)^2 r^3.$$

Для трехмерной сферы радиуса  $r$  трехмерная скалярная кривизна (1.43)

$$R = \frac{6}{r^2}, \quad \sqrt{\gamma} = r^3$$

и гамильтониан (3.17) отрицательно определен:

$$H = -3r(\dot{r}^2 + 1). \quad (4.9)$$

Постоянство гамильтониана приводит к дифференциальному уравнению первого порядка:

$$-H = 3r(\dot{r}^2 + 1) = 3r_{max},$$

являющееся дифференциальным уравнением циклоиды. Это решение – вакуумное, где  $r_{max}$  – константа интегрирования. К этим уравнениям можно добавить и источники, причем, если в качестве источника берется только когерентная пылевидная материя, то она дает лишь вклад в суммарную плотность энергии, то есть не меняя характера решений, изменяет лишь константу  $r_{max}$ .

### 4.3 Вихревое поле

Следующая задача – о вихревом поле. В целом уравнения ТГВ нелинейны, однако уравнения связей на поле скоростей линейны по этому полю. Эта задача интересна тем, что единственное уравнение связи на единственную – вихревую – компоненту поля скоростей не зависит от компонент метрического тензора и, будучи определяющим решение, обеспечивает принцип суперпозиции, представляя, в частности, серию мультипольных решений.

Метрика стационарна, осесимметрична и её можно привести к виду:

$$dl^2 = e^{w(r,\vartheta)} (dr^2 + r^2 d\vartheta^2) + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2. \quad (4.10)$$

Поле абсолютных скоростей, также зависящее от  $r$  и  $\vartheta$ , – поле вращения  $V^\varphi = \Omega(r, \vartheta)$ . Тензор скоростей деформации пространства

$$\mu_1^3 = \frac{1}{2} \Omega_{,r}, \quad \mu_3^1 = \frac{r^2}{2} e^{-w} \Omega_{,r} \sin^2 \vartheta;$$

$$\mu_2^3 = \frac{1}{2} \Omega_{,\vartheta}, \quad \mu_3^2 = \frac{1}{2} e^{-w} \Omega_{,\vartheta} \sin^2 \vartheta;$$

определяет импульсы

$$\pi_3^1 = \frac{r^4}{2} \Omega_{,r} \sin^3 \vartheta; \quad \pi_1^3 = \frac{r^2}{2} e^w \Omega_{,r} \sin \vartheta;$$

$$\pi_3^2 = \frac{r^2}{2} \Omega_{,\vartheta} \sin^3 \vartheta; \quad \pi_2^3 = \frac{r^2}{2} e^w \Omega_{,\vartheta} \sin \vartheta.$$

Кинетическая энергия

$$T = \frac{r^4 c^2}{32\pi k} \left( \Omega_{,r}^2 + \frac{1}{r^2} \Omega_{,\vartheta}^2 \right) \sin^3 \vartheta \quad (4.11)$$

определяется только вихревым полем  $\Omega$  и не зависит от метрической функции  $w$ .

Из единственной нетривиальной связи для  $V^\varphi$  при отсутствии источника следует уравнение на  $\Omega$ :

$$\Omega_{,rr} + \frac{4}{r} \Omega_{,r} + \frac{1}{r^2} (\Omega_{,\vartheta\vartheta} + 3 \operatorname{ctg} \vartheta \Omega_{,\vartheta}) = 0. \quad (4.12)$$

Замечательно, что это линейное дифференциальное уравнение второго порядка не зависит от метрической функции  $w(r, \vartheta)$ .

Собственные токи

$$b_1^1 = -b_2^2 = \frac{1}{4} e^{-w} \sin^2 \vartheta (r^2 \Omega_{,r}^2 - \Omega_{,\vartheta}^2);$$

$$b_2^1 = r^2 b_1^2 = \frac{1}{2} e^{-w} r^2 \sin^2 \vartheta \Omega_{,r} \Omega_{,\vartheta};$$

$$b_3^3 = -\frac{3}{4} e^{-w} \sin^2 \vartheta (r^2 \Omega_{,r}^2 + \Omega_{,\vartheta}^2)$$

вместе с тензором Риччи, определяемого метрикой (4.10)

$$R_{11} = -\frac{1}{2r^2} (r^2 w_{,rr} + w_{,\vartheta\vartheta} + \operatorname{ctg} \vartheta w_{,\vartheta});$$

$$R_{12} = \frac{1}{2r} (w_{,\vartheta} + \operatorname{ctg} \vartheta r w_{,r});$$

$$R_{22} = \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} \vartheta w_{,\vartheta} - w_{,\vartheta\vartheta} - 2r w_{,r}),$$

приводят к уравнениям на метрику, из которых вследствие тождеств Гильберта независимы только два, определяющие производные от функции  $w$  через вихревое поле  $\Omega$ :

$$w_{,r} = \frac{r}{2c^2} (\Omega_{,\vartheta}^2 - r^2 \Omega_{,r}^2 - 2 \operatorname{ctg} \vartheta r \Omega_{,r} \Omega_{,\vartheta}) \sin^4 \vartheta;$$

$$w_{,\vartheta} = \frac{r^2}{2c^2} (\operatorname{ctg} \vartheta (r^2 \Omega_{,r}^2 - \Omega_{,\vartheta}^2) - 2r \Omega_{,r} \Omega_{,\vartheta}) \sin^4 \vartheta. \quad (4.13)$$

При выполнении этих соотношений, а также уравнения (4.12) на  $\Omega$  все уравнения динамики и связи удовлетворяются.

Плотность энергии теперь выражается только через производные от  $\Omega$ :

$$\varepsilon\sqrt{\gamma} = \frac{r^2 c^2}{8\pi k} (r^2 \Omega_{,r}^2 + \Omega_{,\vartheta}^2) \sin^3 \vartheta, \quad (4.14)$$

а кинетическая энергия ровно в четыре раза меньше. Это есть следствие *теоремы о вириале пространства*.

Полная энергия в некоторой области  $B$  без источников

$$E_B = 2\pi \int_B \varepsilon\sqrt{\gamma} dr d\vartheta \quad (4.15)$$

положительно определена и достигает экстремума на решениях уравнения (4.12).

Для рассматриваемой задачи выполнены все условия для применения теоремы вириала (3.13).

Для определения кинетической энергии нужно знать поле абсолютных скоростей в рассматриваемой области, информацию о котором могут дать видимые звезды, а теорема о вириале позволяет вычислить полную энергию.

### 4.3.1 Слабый принцип суперпозиции

Итак, решение задачи о нахождении стационарного вихревого поля в пространстве состоит в решении линейного дифференциального уравнения (4.12) при заданных граничных условиях, после чего уравнения (4.13) определяют метрическую функцию  $w(r, \vartheta)$ .

Несмотря на то, что в целом задача является нелинейной, первая (главная) задача – нахождение вихревого поля  $\Omega(r, \vartheta)$  – является линейной и для нее выполняется принцип суперпозиции. То есть любое поле  $\Omega$  может быть представлено как суперпозиция некоторых базовых решений. Уравнения (4.13) для нахождения поля  $w(r, \vartheta)$  квадратичны по производным поля  $\Omega$ , и решение в целом не является суперпозицией частных решений.

### 4.3.2 Мультипольные решения

Дифференциальное уравнение (4.12) однородно по радиусу  $r$ , поэтому его частные решения можно искать в виде степенного ряда

$$\Omega(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+3}} \right) P_l(\cos \vartheta). \quad (4.16)$$

Для угловой части дифференциальное уравнение (где  $x = \cos \vartheta$ ):

$$(x^2 - 1)P_l'' + 4xP_l' - l(l+3)P_l = 0. \quad (4.17)$$

Его решения при целых  $l$  – полиномы Гегенбауэра с  $\alpha = 3/2$  – являются основой сферических функций в пятимерном пространстве. В частности, при  $l = -3$  (как и при  $l = 0$ ) решением уравнения (4.17) является константа, то есть в целом для уравнения (4.12) имеется *монопольное решение*

$$\Omega_0(r, \vartheta) = \frac{1}{r^3}. \quad (4.18)$$

Оно определяет *производящую функцию* полиномов

$$\frac{1}{(1 - 2sx + s^2)^{3/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)(l+2)}{2} P_l(x) s^l. \quad (4.19)$$

При таком определении  $P_l(1) = 1$  – как и для полиномов Лежандра.

Хотя эти полиномы хорошо известны, приведем первые пять:

$$P_0 = 1; \quad P_1 = x; \quad P_2 = \frac{1}{4}(5x^2 - 1);$$

$$P_3 = \frac{1}{4}x(7x^2 - 3); \quad P_4 = \frac{1}{8}(21x^4 - 14x^2 + 1).$$

Эти полиномы ортогональны с весом  $(1 - x^2)$ , при этом

$$\int_{-1}^1 P_l^2(x) (1 - x^2) dx = \frac{8}{(l+1)(l+2)(2l+3)}. \quad (4.20)$$

При  $x = 0$  производящая функция (4.19) принимает вид:

$$\frac{1}{(1 + s^2)^{3/2}} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m+1)!}{2^{2m}(m!)^2} s^{2m},$$

что определяет значение четных полиномов при  $x = 0$  (нечетные равны нулю):

$$P_{2m}(0) = (-1)^m \frac{(2m)!}{(m!)^2 (m+1) 2^{2m}}. \quad (4.21)$$

Каждому *чистому* мультиполюльному решению  $\Omega_l = a r^l P_l(\cos \vartheta)$  соответствует мультиполюльное решение

$$w_l(r, \vartheta) = a^2 r^{2(l+1)} \sin^4 \vartheta \frac{1}{4(l+1)} (2l \operatorname{ctg} \vartheta P_l P_{l,\vartheta} - P_{l,\vartheta}^2 + l^2 P_l^2) \quad (4.22)$$

и плотность энергии

$$\varepsilon \sqrt{\gamma} = a^2 r^{2(l+1)} \sin^3 \vartheta (P_{l,\vartheta}^2 + l^2 P_l^2). \quad (4.23)$$

Однако, если вихревое поле  $\Omega$  является суперпозицией мультиполюльных решений, то возникает интерференция и функция  $w$  не является суперпозицией функций составляющих ее монополей.

### 4.3.3 Поле с кольцевым источником

Задача о нахождении вихревого поля в математической части совпадает с задачей теории потенциала в пятимерном пространстве. Поэтому сразу можно сказать, что всюду регулярного ограниченного вихревого поля без источников не существует.

Наиболее естественным источником для вихревого поля представляется круговой ток – телá, вращающиеся вокруг общей оси наподобие колец Сатурна. Аналогичная задача в пятимерной электростатике – поле заряженного тонкого кольца (нити) радиуса  $R$ . Задача осесимметрична, и вихревое поле вне радиусов источника может быть представлено суперпозицией мультиполей. Мультиполюльные коэффициенты можно найти из разложения потенциала на оси (при  $\vartheta = 0$ ,  $P_l = 1$  при всех  $l$ ):

$$\Omega(z) = \frac{Q}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{Q}{R^3} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(\frac{z}{R}\right)^{2m} & z < R \\ \frac{Q}{z^3} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(\frac{R}{z}\right)^{2m} & z > R \end{array} \right\},$$

где

$$A_m = (-1)^m \frac{(2m+1)!}{2^{2m} (m!)^2}.$$

Так как на оси  $z = r$ ,  $\cos \vartheta = 1$ , то это есть разложение по четным мультиполям

$$\Omega = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m+1)!}{2^{2m}(m!)^2} \left(\frac{r}{R}\right)^{2m} P_{2m}(\cos \vartheta)$$

при  $r < R$  и аналогичное во внешней области. Если источник кольцевой находится в “плоскости” симметрии при  $\cos \vartheta = 0$ , вклад в разложение дают только четные полиномы, подставляя значение которых из (4.21), получаем при  $r < R$

$$\Omega(r) = \frac{Q}{R^3} \sum \frac{(2m!)(2m+1)!}{(m+1)(m!)^4 2^{4m}} \left(\frac{r}{R}\right)^{2m}.$$

Вихревое поле возрастает с ростом радиуса.

При  $r > R$

$$\Omega(r) = \frac{Q}{r^3} \sum \frac{(2m!)(2m+1)!}{(m+1)(m!)^4 2^{4m}} \left(\frac{R}{r}\right)^{2m}$$

– с ростом радиуса поле убывает.

Как мы видели ранее, вращающиеся частицы, чтобы быть источниками, должны двигаться относительно пространства, т.е. относительно принятой неинерциальной системы их скорости должны быть отличными от скорости пространства.

#### 4.3.4 Энергия

Для представления о космических энергиях рассмотрим следующую задачу. Шар радиуса  $R$  равномерно вращается с угловой скоростью  $\Omega$  когерентно. Это значит, что на поверхности шара скорость вращения совпадает с полем абсолютных скоростей пространства, то есть вне шара поле угловых скоростей определяется монопольным решением

$$\omega(r) = \Omega \frac{R^3}{r^3}. \quad (4.24)$$

При этом плотность энергии вне шара (внутри шара поле однородно и плотность энергии равна нулю):

$$\varepsilon = \frac{9\Omega^2 R^6 \sin^2 \theta}{r^6},$$

а полная энергия пространства вне шара (уже в размерном виде):

$$E = \frac{c^4}{16\pi k} 9\Omega^2 R^6 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta \int_R^\infty \frac{r^2 dr}{r^6} =$$

$$\frac{R^3 \Omega^2 c^2}{2k} \equiv M c^2, \quad (4.25)$$

где за  $M$  мы обозначили эквивалентную массу (это не масса шара)

$$M = \frac{R^3 \Omega^2}{2k}. \quad (4.26)$$

Возьмем, например, шар диаметром 20 см. ( $R = 0.1$  м), делающий 1 оборот в секунду ( $\Omega = 2\pi c^{-1}$ ). Получим  $M = 300\,000\,000$  кг. Для вовлечения пространства вне шара в когерентное с ним вращение нужно затратить энергию, выделяемую при аннигиляции 300 тысяч тонн вещества. Поэтому лабораторные эксперименты с вихрями в пространстве представляются не очень реальными.

Этот же пример разъясняет, почему наше пространство с высокой степенью точности евклидово: в выражении для энергии перед кривизной пространства стоит громадный численный множитель  $c^4/(16\pi k)$ . Это говорит о том, что малейшие отклонения от евклидова пространства требуют громадных затрат энергии.

Наше пространство (почти) евклидово не из-за красоты и изящества евклидовой геометрии, а вследствие того, что такое пространство имеет минимальную энергию.

## 4.4 Плоская анизотропная модель

Рассмотрим анизотропную космологическую задачу, где компоненты метрики зависят только от времени, но метрика не диагональна:

$$dl^2 = \gamma_{ij}(t) dx^i dx^j = r^{4/3}(t) \lambda_{ij}(t) dx^i dx^j; \quad (4.27)$$

где  $\lambda_{ij}$  – матрица с единичным детерминантом, а  $\sqrt{\gamma} = r^2$ .

$$\mu_i^k = \frac{1}{2} \gamma^{kj} \dot{\gamma}_{ji} = \frac{2}{3} \frac{\dot{r}}{r} \delta_i^k + \frac{1}{2} \lambda^{kj} \dot{\lambda}_{ji}; \quad \mu_i^i = 2 \frac{\dot{r}}{r}.$$

Так как метрика от пространственных координат не зависит, потенциальная энергия в гамильтониане отсутствует:

$$T = r^2 \frac{L^2}{2} - \frac{4}{3} \dot{r}^2, \quad (4.28)$$

где величина

$$L^2 = \frac{1}{4} \lambda^{ij} \dot{\lambda}_{jk} \lambda^{kl} \dot{\lambda}_{li}$$

не зависит от масштаба  $r$ . Для вычисления  $L^2$  нужно как-то параметризовать унимодулярную  $3 \times 3$  матрицу  $\lambda_{ij}$ . Когда она диагональна, ее можно параметризовать двумя функциями времени:

$$A = \begin{bmatrix} e^{\frac{2}{3}\mu+2\nu} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2}{3}\mu-2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{4}{3}\mu} \end{bmatrix}$$

В общем же случае она приводится к диагональному виду ортогональной матрицей  $O$ , которую можно параметризовать углами Эйлера  $\vartheta, \varphi, \psi$ :

$$(\gamma_{ij}) = O \cdot A \cdot O^T; \quad (\gamma^{ij}) = O \cdot A^{-1} \cdot O^T.$$

Матрица  $\mu_j^i$ , определяющая кинетическую энергию

$$(\mu_j^i) = \frac{1}{2} (\gamma^{ik} \dot{\gamma}_{kj}) = O \cdot A^{-1} \cdot \Omega \cdot A \cdot O^T + O \cdot A^{-1} \cdot \dot{A} \cdot O^T - O \cdot \Omega \cdot O^T, \quad (4.29)$$

где  $\Omega = \dot{O} \cdot O^T$ .

Квадратичная форма, определяющая кинетическую энергию, после подстановки производных от матриц принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{2} = \frac{1}{2} \mu_j^i \mu_i^j = \frac{\dot{\mu}^2}{6} + \frac{\dot{\nu}^2}{2} + \frac{1}{2} (\text{sh}^2(2\nu) \dot{\varphi}^2 + \\ (\text{sh}^2(\mu - \nu) \cos^2 \varphi + \text{sh}^2(\mu + \nu) \sin^2 \varphi) \dot{\vartheta}^2 - \\ 2 \text{sh}(2\mu) \text{sh}(2\nu) \sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi \dot{\vartheta} \dot{\psi} + 2 \text{sh}^2(2\nu) \cos \vartheta \dot{\varphi} \dot{\psi} + \\ (\text{sh}^2(2\nu) \cos^2 \vartheta + (\text{sh}^2(\mu + \nu) \cos^2 \varphi + \text{sh}^2(\mu - \nu) \sin^2 \varphi) \sin^2 \vartheta) \dot{\psi}^2). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Введем линейные комбинации скоростей

$$\begin{aligned} l_1 &= \dot{\vartheta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi; \\ l_2 &= \dot{\vartheta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi; \\ l_3 &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta \end{aligned} \quad (4.31)$$

это выражение упрощается:

$$T_1 = \frac{r^2 L^2}{2} = \frac{r^2}{2} \left( \frac{\dot{\mu}^2}{3} + \dot{\nu}^2 + \text{sh}^2(\mu + \nu) l_1^2 + \text{sh}^2(\mu - \nu) l_2^2 + \text{sh}^2(2\nu) l_3^2 \right). \quad (4.32)$$

Теперь введем импульсы, канонически сопряженные углам  $\vartheta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ :

$$\begin{aligned} p_{\vartheta} &= \frac{\partial T_1}{\partial \dot{\vartheta}} = r^2 (\text{sh}^2(\mu + \nu) \sin \varphi l_1 + \text{sh}^2(\mu - \nu) \cos \varphi l_2); \\ p_{\psi} &= \frac{\partial T_1}{\partial \dot{\psi}} = \\ &= r^2 (\text{sh}^2(2\nu) \cos \vartheta l_3 - \text{sh}^2(\mu + \nu) \sin \vartheta \cos \varphi l_1 + \text{sh}^2(\mu - \nu) \sin \vartheta \sin \varphi l_2); \\ p_{\varphi} &= \frac{\partial T_1}{\partial \dot{\varphi}} = r^2 \text{sh}^2(2\nu) l_3. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Для выражения скоростей через импульсы найдем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} r^2 (\text{sh}^2(\mu - \nu) \cos \varphi l_2 + \text{sh}^2(\mu + \nu) \sin \varphi l_1) &= p_{\vartheta}; \\ r^2 (\text{sh}^2(\mu - \nu) \sin \varphi l_2 - \text{sh}^2(\mu + \nu) \cos \varphi l_1) &= p, \end{aligned}$$

где введена линейная по импульсам функция

$$p = \frac{p_{\psi} - \cos \vartheta p_{\varphi}}{\sin \vartheta}. \quad (4.34)$$

Отсюда окончательно получим:

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{p_{\vartheta} \sin \varphi - p \cos \varphi}{r^2 \text{sh}^2(\mu + \nu)} \equiv \frac{p_1}{r^2 \text{sh}^2(\mu + \nu)}; \\ l_2 &= \frac{p_{\vartheta} \cos \varphi + p \sin \varphi}{r^2 \text{sh}^2(\mu - \nu)} \equiv \frac{p_2}{r^2 \text{sh}^2(\mu - \nu)}; \\ l_3 &= \frac{p_{\varphi}}{r^2 \text{sh}^2(2\nu)} \equiv \frac{p_3}{r^2 \text{sh}^2(2\nu)} \end{aligned} \quad (4.35)$$

с соответствующим определением  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$ .

Коммутационные соотношения (скобки Пуассона)

$$\{p, p_\varphi\} = 0; \quad \{p, p_\vartheta\} = \frac{\partial p}{\partial \vartheta} = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta}$$

приводят к коммутационным соотношениям

$$\{p_1, p_2\} = -p_3; \quad \{p_2, p_3\} = -p_1; \quad \{p_3, p_1\} = -p_2, \quad (4.36)$$

совпадающими с коммутационными соотношениями инфинитезимальных операторов группы трехмерных вращений. Отсюда следует, что оператор квадрата момента

$$P^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \quad (4.37)$$

коммутирует с  $p_1, p_2, p_3$  и, следовательно, с гамильтонианом, являясь, таким образом, интегралом движения.

Подставив теперь  $l_i$ , получим составляющую гамильтониана (4.32)

$$T_1 = \frac{B}{r^2} = \frac{1}{2r^2} \left( 3p_\mu^2 + p_\nu^2 + \frac{p_3^2}{\text{sh}^2(2\nu)} + \frac{p_1^2}{\text{sh}^2(\mu + \nu)} + \frac{p_2^2}{\text{sh}^2(\mu - \nu)} \right) \quad (4.38)$$

и сам гамильтониан

$$H = \frac{B}{r^2} - \frac{3}{16} p_r^2 = \frac{B}{r^2} - \frac{4}{3} \dot{r}^2. \quad (4.39)$$

Функция  $B$  положительно определена и коммутирует с гамильтонианом, а потому является константой, которую запишем как  $B = l^2/3$ . Уравнение динамики масштаба определяется законом сохранения энергии  $T = -M$ :

$$T = \frac{l^2}{3r^2} - \frac{4}{3} \dot{r}^2 = -M, \quad (4.40)$$

откуда

$$\dot{r}^2 = \frac{3}{4} M + \frac{l^2}{4r^2}.$$

Решение этого уравнения

$$\sqrt{\gamma} = r^2 = l t + \frac{3}{4} M t^2. \quad (4.41)$$

Константа интегрирования выбрана так, что  $\sqrt{\gamma} = 0$  при  $t = 0$ .

Интересно проследить и за динамикой переменных  $\mu, \nu, \vartheta, \varphi, \psi$ , определяющих сдвиговую деформацию метрического тензора (объединим их в набор  $\xi^i, i = 1 \dots 5$ ), и сопряженных им импульсов  $\eta_i$ . Их динамика определяется функцией  $B$ :

$$\frac{d\xi^i}{dt} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial B}{\partial \eta_i}; \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial B}{\partial \xi^i}.$$

Можно ввести переменную  $\tau$ :

$$d\tau = \frac{dt}{r^2} = \frac{dt}{lt + 3/4 Mt^2}; \quad t = \frac{4l}{3M} \frac{e^{l\tau}}{1 - \frac{3M}{4l} e^{l\tau}}.$$

Динамика сдвиговых параметров в этой переменной не зависит от динамики масштаба  $r$ :

$$\frac{d\xi^i}{d\tau} = \frac{\partial B}{\partial \eta_i}; \quad \frac{d\eta_i}{d\tau} = -\frac{\partial B}{\partial \xi^i}.$$

## 4.5 Однородное электрическое поле

В классической физике однородное статическое электрическое поле удовлетворяет уравнениям Максвелла. Однако его тензор энергии-импульса является источником в уравнениях динамики пространства, и решение в целом оказывается нестационарным.

Электрическое поле выделяет одномерную прямую вдоль поля и ортогональную ей плоскость, масштабы в которых могут меняться с течением времени независимо друг от друга:

$$dl^2 = m^2(t)dx^2 + R^2(t)(dy^2 + dz^2); \quad \sqrt{\gamma} = m R^2. \quad (4.42)$$

Пространство в каждый момент является евклидовым с нулевой кривизной, поэтому лагранжиан чистой гравитации имеет только кинетическую энергию:

$$L_\gamma = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\dot{m}}{m} \right)^2 + 2 \left( \frac{\dot{R}}{R^2} \right)^2 - \left( \frac{\dot{m}}{m} + 2 \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 \right) m R^2 = \\ - (2 R \dot{m} \dot{R} + m \dot{R}^2). \quad (4.43)$$

Больше не нужно никаких вычислений, связанных с кривизной четырехмерного пространства.

Электромагнитное поле определяется единственной компонентой векторного потенциала  $A_x(t) \equiv A$ :

$$E \equiv F_{x0} = \dot{A}; \quad F^{0x} = \frac{\dot{A}}{m^2}. \quad (4.44)$$

В лагранжиан электромагнитное поле входит через

$$L_e = \frac{\sqrt{\gamma}}{2} F^{0x} F_{x0} = \frac{\dot{A}^2 R^2}{2m}.$$

Суммарный лагранжиан гравитационного и электромагнитного полей

$$L = \frac{\dot{A}^2 R^2}{2m} - 2R \dot{m} \dot{R} - m \dot{R}^2. \quad (4.45)$$

Далее идет стандартный процесс решения задачи с заданным лагранжианом. Здесь переменная  $A$  циклическая и сопряженный ей импульс является константой:

$$p_A = \frac{\dot{A} R^2}{m} \equiv Q; \quad E = \dot{A} = \frac{m Q}{R^2}. \quad (4.46)$$

Определяя импульсы  $P_R$ ,  $P_m$  через скорости, находим

$$H = \frac{m Q^2}{2R^2} + \frac{m P_m^2}{4R^2} - \frac{P_R P_m}{2R} = -M. \quad (4.47)$$

Константа  $-M$  – значение гамильтониана на решении.

Гамильтониан определяет уравнения динамики. Приведем их решение. Зависимость  $R(t)$  определяется соотношением:

$$(t - t_0)^2 = \frac{8R_0}{9Q^2} (2R_0 + R)^2 (R - R_0);$$

Масштаб  $m$  выражается через масштаб  $R$ :

$$m = \frac{2M}{3Q^2 R} (R^2 + 4R_0 R - 8R_0^2) + \frac{b}{R} \sqrt{\frac{R}{R_0} - 1}.$$

Здесь  $M$ ,  $Q$ ,  $R_0$ ,  $b$  – константы интегрирования.

Первое из этих выражений показывает, что масштаб  $R$  уменьшается от бесконечности до  $R_0$ , а затем снова растет до бесконечности, то есть в плоскости, перпендикулярной электрическому полю, сингулярности отсутствуют.

При каком-то  $R = R_1$ , определяемым соотношением констант интегрирования, масштаб  $m$  обращается в нуль. Возникает сингулярность, но в отличие от фридмановской сингулярности в ОТО, где весь мир стягивается в точку, здесь весь мир стягивается в плоскость.

## 4.6 Динамическая модель В9

Метрика пространства В9 дается выражением (2.20). При переходе к динамике параметры метрики  $(a, b, c)$  становятся функциями времени.

### 4.6.1 Динамика пространства

В пространстве В9 возможно однородное поле скоростей

$$V^i(\vartheta, \varphi, \psi, t) = \omega_1(t) \mu_{(1)}^i(\vartheta, \varphi) + \omega_2(t) \mu_{(2)}^i(\vartheta, \varphi) + \omega_3(t) \mu_{(3)}^i. \quad (4.48)$$

В общем случае при  $a \neq b \neq c$  реперные поля  $\mu_{(s)}^i$  уже не являются полями Киллинга, и создают добавки в тензор деформации пространства  $\mu_{ij}$  через тензор

$$K_{ij}^{(s)} = \mu_{i;j}^{(s)} + \mu_{i;i}^{(s)}.$$

У него отличны от нуля только недиагональные компоненты:

$$K_{ij}^{(1)} \mu_{(2)}^i \mu_{(3)}^j = c^2 - b^2; \quad K_{ij}^{(2)} \mu_{(1)}^i \mu_{(3)}^j = a^2 - c^2; \quad K_{ij}^{(3)} \mu_{(1)}^i \mu_{(2)}^j = b^2 - a^2.$$

С учетом этого тензор деформации пространства имеет вид:

$$(\mu_{\beta}^{\alpha}) = \begin{pmatrix} \dot{a}/a & \omega_3 \frac{b^2 - a^2}{2a^2} & \omega_2 \frac{a^2 - c^2}{2a^2} \\ \omega_3 \frac{b^2 - a^2}{2b^2} & \dot{b}/b & \omega_1 \frac{c^2 - b^2}{2b^2} \\ \omega_2 \frac{a^2 - c^2}{2c^2} & \omega_1 \frac{c^2 - b^2}{2c^2} & \dot{c}/c \end{pmatrix}. \quad (4.49)$$

Лагранжиан пространства оказывается чисто квадратичным по полю скоростей:

$$L = -(\dot{a}\dot{b}\dot{c} + \dot{a}\dot{b}\dot{c} + a\dot{b}\dot{c}) + \frac{1}{2} \left( \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \right) - \frac{a^4 + b^4 + c^4}{4abc} + \frac{a(b^2 - c^2)^2}{bc} \frac{\omega_1^2}{2} + \frac{b(a^2 - c^2)^2}{ac} \frac{\omega_2^2}{2} + \frac{c(a^2 - b^2)^2}{ab} \frac{\omega_3^2}{2}. \quad (4.50)$$

Вследствие этого уравнения связей – равенство нулю производных по  $\omega_s$  – приводят к равенству нулю поля скоростей в динамике пустого пространства. Однако при наличии других полей (например, электромагнитного) в лагранжиане появляются линейные по  $\omega_s$  слагаемые, что приводит к *глобально неунуничтожимым* полям скоростей.

#### 4.6.2 Динамика с однородным электромагнитным полем

Пространство В9 может служить базой для динамики с однородными электрическим и магнитным полями. Однородное электромагнитное поле раскладывается по метрическому реперу  $\mu_{(s)i}$ :

$$A_i(\vartheta, \varphi, \psi, t) = \sum_{s=1}^3 q_s(t) \mu_{(s)i}(\vartheta, \varphi).$$

При отсутствии поля скоростей лагранжиан электромагнитного поля представляется как сумма трех несвязанных друг с другом мод:

$$L_q = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{bc}{a} q_1^2 - \frac{a}{bc} q_1^2 \right) + \left( \frac{ac}{b} q_2^2 - \frac{b}{ac} q_2^2 \right) + \left( \frac{ab}{c} q_3^2 - \frac{c}{ab} q_3^2 \right) \right).$$

При наличии поля скоростей производная по времени заменяется на ковариантную

$$\begin{aligned} D_t q_1 &= \dot{q}_1 + \omega_2 q_3 - \omega_3 q_2; \\ D_t q_2 &= \dot{q}_2 + \omega_3 q_1 - \omega_1 q_3; \\ D_t q_3 &= \dot{q}_3 + \omega_1 q_2 - \omega_2 q_1 \end{aligned}$$

и эти моды взаимодействуют. После выражения производных от потенциалов через сопряженные импульсы гамильтониан электромагнитного поля принимает вид:

$$H_q = \frac{a}{2bc} (p_1^2 + q_1^2) + \frac{b}{2ac} (p_2^2 + q_2^2) + \frac{c}{2ab} (p_3^2 + q_3^2) +$$

$$\omega_1 (p_2 q_3 - p_3 q_2) + \omega_2 (p_3 q_1 - p_1 q_3) + \omega_3 (p_1 q_2 - p_2 q_1). \quad (4.51)$$

Вместе с гамильтонианом пространства он образует квадратичную форму по угловым скоростям  $\omega_s$ :

$$H = H_g + H_q = H_0 - \frac{a(b^2 - c^2)^2}{bc} \frac{\omega_1^2}{2} - \frac{b(a^2 - c^2)^2}{ac} \frac{\omega_2^2}{2} - \frac{c(a^2 - b^2)^2}{ab} \frac{\omega_3^2}{2} + \omega_1 (p_2 q_3 - p_3 q_2) + \omega_2 (p_3 q_1 - p_1 q_3) + \omega_3 (p_1 q_2 - p_2 q_1), \quad (4.52)$$

где  $H_0$  гамильтониан при нулевых угловых скоростях. Вариационные уравнения по  $\omega_s$  приводят к линейным уравнениям, из которых находятся угловые скорости:

$$\omega_1 = \frac{bc(p_2 q_3 - p_3 q_2)}{a(b^2 - c^2)^2}; \quad \omega_2 = \frac{ac(p_3 q_1 - p_1 q_3)}{b(a^2 - c^2)^2}; \quad \omega_3 = \frac{ab(p_1 q_2 - p_2 q_1)}{c(a^2 - b^2)^2}.$$

Подставляя эти значения в (4.52), получим гамильтониан, не содержащий угловых скоростей, но четвертой степени по электромагнитным потенциалам и импульсам:

$$H = H_0 + \frac{bc(p_2 q_3 - p_3 q_2)^2}{2a(b^2 - c^2)^2} + \frac{ac(p_3 q_1 - p_1 q_3)^2}{2b(c^2 - a^2)^2} + \frac{ab(p_1 q_2 - p_2 q_1)^2}{2c(a^2 - b^2)^2}.$$

С математической точки зрения ТГВ представила четырехмерное пространство - время как расслоенное пространство с базой в виде трехмерного риманова пространства и слоем в виде оси времени со структурной группой сдвигов вдоль этой оси, приводящей к закону сохранения энергии.

Рассмотренный пример показывает, что это расслоение может быть нетривиальным - поле скоростей всюду здесь не устранимо.

## 4.7 Плоские гравитационные волны

Рассмотрим метрику однородно деформированной плоскости с зависимостью коэффициентов деформации от времени и переменной вдоль ортогональной ей оси  $x$ . Полную метрику в этой плоскости  $(y, z)$  удобнее параметризовать так, чтобы явно выделить масштабный множитель  $r$ :

$$dl^2 = r ((\text{ch}\chi + \text{sh}\chi \cos \eta) dy^2 + 2 \text{sh}\chi \sin \eta dy dz + (\text{ch}\chi - \text{sh}\chi \cos \eta) dz^2). \quad (4.53)$$

Переменные  $r$ ,  $\chi$  и  $\eta$  зависят от  $t$  и  $x$ . Мера  $\sqrt{\gamma} = r$ .

Кинетическая энергия для такой метрики в инерциальной системе

$$K = \frac{1}{4} \left( -\frac{\dot{r}^2}{r} + r (\dot{\chi}^2 + \text{sh}^2 \chi \dot{\eta}^2) \right),$$

а (трехмерная) скалярная кривизна

$$\frac{1}{2} R \sqrt{\gamma} = \frac{1}{4} \left( \frac{r'^2}{r} - r (\chi'^2 + \text{sh}^2 \chi \eta'^2) \right) - r''.$$

В данной симметрии возможна лишь компонента абсолютной скорости вдоль оси  $x$ :  $V^x \equiv V$ , что видоизменяет производные по времени на ковариантные:

$$D_t r = \dot{r} + V r' + r V'; \quad D_t \chi = \dot{\chi} + V \chi'; \quad D_t \eta = \dot{\eta} + V \eta',$$

что после отбрасывания последнего слагаемого в потенциальной энергии (полная производная) приводит к лагранжиану (для простоты удвоим его):

$$L = \frac{-(\dot{r} + V r' + V' r)^2 + r'^2}{2r} + \tag{4.54}$$

$$\frac{r}{2} ((\dot{\chi} + V \chi')^2 - \chi'^2 + \text{sh}^2 \chi ((\dot{\eta} + V \eta')^2 - \eta'^2)).$$

Выражая производные по времени от метрических функций через сопряженные импульсы

$$p_r = -\frac{\dot{r} + V r' + V' r}{r}; \quad \dot{r} = -r p_r - V r' - r V';$$

$$p_\chi = r (\dot{\chi} + V \chi'); \quad \dot{\chi} = \frac{p_\chi}{r} - V \chi';$$

$$p_\eta = r \text{sh}^2 \chi (\dot{\eta} + V \eta'); \quad \dot{\eta} = \frac{p_\eta}{r \text{sh}^2 \chi} - V \eta',$$

получаем гамильтониан (после интегрирования слагаемого с  $V'$  по частям):

$$H = \int (p_r \dot{r} + p_\chi \dot{\chi} + p_\eta \dot{\eta} - L) dx = \int V (r p_r' - \chi' p_\chi - \eta' p_\eta) dx +$$

$$\frac{1}{2} \int \left( -r p_r^2 + \frac{p_\chi^2}{r} + \frac{p_\eta^2}{r \operatorname{sh}^2 \chi} - \frac{r'^2}{r} + r (\chi'^2 + \operatorname{sh}^2 \chi \eta'^2) \right) dx. \quad (4.55)$$

Заметим, что лагранжиан (4.54) квадратичен по скорости, а гамильтониан (4.55) линеен, поэтому его вариация по  $V$  определяет связь:

$$p_r' = \frac{\chi' p_\chi + \eta' p_\eta}{r}. \quad (4.56)$$

Описание динамики плоских гравитационных волн на гамильтоновом уровне можно представить через гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} \int \left( -r p_r^2 + \frac{p_\chi^2}{r} + \frac{p_\eta^2}{r \operatorname{sh}^2 \chi} - \frac{r'^2}{r} + r (\chi'^2 + \operatorname{sh}^2 \chi \eta'^2) \right) dx \quad (4.57)$$

и локальную связь

$$Q = r p_r' - \chi' p_\chi - \eta' p_\eta = 0. \quad (4.58)$$

Условие сохранения связи

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \dot{r} p_r' + r (\dot{p}_r)' - (\dot{\chi})' p_\chi - \chi' \dot{p}_\chi - (\dot{\eta})' p_\eta - \eta' \dot{p}_\eta = \\ &= - \left( r'' - \frac{(r')^2}{r} + r ((\chi')^2 + \operatorname{sh}^2 \chi (\eta')^2)' \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.59)$$

не содержит импульсов — является ограничением только на мгновенное распределение функций.

## Глава 4

# Динамика в римановом пространстве

Теория, с которой конкурирует теория глобального времени в описании пространства и времени – *общая теория относительности* (ОТО), – будет рассмотрена в следующей главе. Следует обратить внимание, что записав уравнения динамики пространства, получив ряд решений, мы не касались специальной теории относительности (СТО). Динамика пространства в целом совершенно не нуждается в СТО. Однако при описании движения тел в той или иной пространственной структуре следует учитывать *локальную структуру пространства и времени*, описываемую метрикой Минковского и локальными преобразованиями Лоренца *локальных* пространства и времени движущегося объекта.

При описании движения тел в ТГВ можно заранее отличать релятивистское движение от нерелятивистского ( $v \ll c$ ), так как скорость движения определяется относительно пространства. Это важно в астрофизике – не нужно усложнять задачи релятивизмом там, где движение заведомо нерелятивистское.

Поэтому сначала мы рассмотрим нерелятивистское движение в динамическом пространстве.

## 5.1 Геодезические линии

Рассмотрим *свободное* движение материальной точки в инерциальном (поле скоростей отсутствует) римановом пространстве с метрическим тензором  $\gamma_{ij}(x)$ . Потенциальная энергия тела равна нулю – движение свободное, и лагранжиан определяется только кинетической энергией:

$$L = T = \frac{m}{2} \left( \frac{dl}{dt} \right)^2 = \frac{m \gamma_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j}{2}. \quad (5.1)$$

В уравнениях Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}; \quad \frac{d}{dt} (m \gamma_{ij}(x) \dot{x}^j) = \frac{\partial \gamma_{kj}}{\partial x^i} \frac{m \dot{x}^k \dot{x}^j}{2}$$

массу тела можно сократить.

$$\gamma_{ij} \ddot{x}^j + \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^k \dot{x}^j = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{kj}}{\partial x^i} \dot{x}^k \dot{x}^j.$$

В левой части выражение

$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^k \dot{x}^j = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x^j} \right) \dot{x}^k \dot{x}^j$$

из-за симметрии по скоростям. Переносим его в правую часть, получаем

$$\gamma_{ij} \ddot{x}^j = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \gamma_{jk}}{\partial x^i} \right) \dot{x}^k \dot{x}^j.$$

Умножая теперь слева на обратный метрический тензор, получаем справа связность (1.10), через которую теперь выражаются ускорения. Это – уравнение движения свободного тела в искривленном пространстве:

$$\ddot{x}^l + \Gamma_{kj}^l \dot{x}^k \dot{x}^j = 0. \quad (5.2)$$

Это уравнение называется уравнением *геодезической линии*.

Если от времени  $t$  перейти к новому параметру  $t = l/v$ ;  $v = \text{const}$ , то в каждом слагаемом уравнения появится множитель  $v^2$ , который можно сократить, поэтому и в этом параметре уравнение геодезической линии будет иметь тот же вид (5.2), только точкой будет определяться производная по  $l$ .

При движении тела есть еще один параметр – сохраняющаяся во время движения энергия:

$$\frac{m \gamma_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j}{2} = E.$$

Если введенный параметр  $v$  выбрать из соотношения  $E = m v^2/2$ , то в параметре  $l$  на геодезической линии будет сохраняться соотношение

$$\gamma_{ij} \frac{dx^i}{dl} \frac{dx^j}{dl} = 1; \quad dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j,$$

откуда следует смысл параметра  $l$  – длина вдоль геодезической.

**Свободное тело движется вдоль геодезической с постоянной скоростью** – это обобщение 1-го закона Ньютона.

В зависимости от величины энергии находится *время* прохождения телом пути от одной точки к другой, но траектория движения тела от энергии не зависит.

Уравнение (5.2) определяет движение, в том числе, и в плоском пространстве, в том числе и в декартовых координатах. Так как в последнем случае связности равны нулю, уравнение получается очень простым:  $\ddot{x}^i = 0$ . Это уравнение равномерного и прямолинейного движения. В других координатах уравнения другие, но решение их – та же прямая линия, записанная в других координатах.

Уравнение (5.2) определяет движение одной материальной точки:  $x^i$ ,  $\dot{x}^i$  – это координаты и скорость одной точки в данный момент времени. Свободное движение *системы точек* описывается полем скоростей  $u^i(x, t)$  – *геодезическим потоком*. С этой точки зрения уравнение (5.2) может быть представлено через ковариантную производную этого поля:

$$\frac{du^i}{dt} = u^j \nabla_j u^i = \frac{dx^j}{dt} \nabla_j u^i = 0. \quad (5.3)$$

Для построения геодезических потоков наиболее естественен метод Гамильтона, следующий из уравнения в частных производных Гамильтона - Якоби:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{2} \gamma^{ij} \frac{\partial s}{\partial x^i} \frac{\partial s}{\partial x^j} = 1. \quad (5.4)$$

От массы движение свободных частиц не зависит. Как и в случае

плоского пространства, уравнения движения – уравнения Гамильтона:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial s}{\partial x^i}; & E &= -\frac{\partial s}{\partial t}; & H &= \frac{1}{2} \gamma^{ij} p_i p_j; \\ \frac{dx^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \gamma^{ij} p_j \equiv u^i; & \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x^i}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Покажем, что эти уравнения приводят к уже выведенным уравнениям геодезической (5.2). Для этого воспользуемся локально геодезической системой, где производные метрического тензора равны нулю:

$$\frac{du^i}{dt} = \gamma^{ij} \frac{dp_j}{dt} = 0 = u^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j}.$$

Это то же самое уравнение.

Как и в классическом случае, изменение во времени любой функции координат и импульсов определяется скобками Пуассона, и как в классическом случае, величина гамильтониана вдоль каждой траектории сохраняется, так как скобки Пуассона его с самим собой равны нулю.

Так как траектория не зависит ни от массы, ни от величины энергии, то для нахождения траектории удобно использовать *приведенный Гамильтониан*:

$$2H = \gamma^{ij}(x) p_i p_j = 1. \quad (5.6)$$

Выражая из него одни импульсы через другие и дифференцируя по последним, находятся дифференциальные уравнения траектории.

## 5.2 Движение по двумерной сфере

В качестве первого нетривиального примера рассмотрим свободное движение по сфере радиуса  $r$ :

$$dl^2 = r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

$$H = \frac{1}{2mr^2} \left( p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} \right).$$

Радиус  $r$  входит простым множителем как масса, поэтому для нахождения траекторий (зависимости между  $\vartheta$  и  $\varphi$ ) можно рассматривать сферу единичного радиуса.

Угол  $\varphi$  – циклическая переменная (явно не входит в лагранжиан), поэтому сопряженный ему импульс  $p_\varphi \equiv l$  является константой на траектории.

$$p_\vartheta^2 + \frac{l^2}{\sin^2 \vartheta} = 1; \quad p_\vartheta = \sqrt{1 - \frac{l^2}{\sin^2 \vartheta}}.$$

Уравнение траектории – с разделяющимися переменными:

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \frac{\partial p_\vartheta}{\partial l} = \frac{-l/\sin^2 \vartheta}{\sqrt{1 - l^2/\sin^2 \vartheta}};$$

$$d\varphi = \frac{-(l/\sin^2 \vartheta) d\vartheta}{\sqrt{1 - l^2/\sin^2 \vartheta}} = \frac{d\xi}{\sqrt{1 - l^2 - \xi^2}}; \quad \xi \equiv l \operatorname{ctg} \vartheta.$$

Это уравнение легко интегрируется

$$\xi = \sqrt{1 - l^2} \sin(\varphi - \varphi_0) = l \operatorname{ctg} \vartheta. \quad (5.7)$$

При  $l = 1$  значение  $\operatorname{ctg} \vartheta = 0$ ;  $\vartheta = \pi/2$ , а угол  $\varphi$  меняется от нуля до  $2\pi$  – это *экватор* сферы.

Траектории при других значениях  $l$  (при  $l^2 < 1$ ) удобно рассмотреть на вложении двумерной сферы в трехмерное евклидово пространство в декартовых координатах:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi; \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi; \quad z = r \cos \vartheta.$$

Из уравнения (5.7) при  $\varphi_0 = 0$  следует линейная связь между  $y$  и  $z$ :

$$y \sqrt{1 - l^2} = lz.$$

Это уравнение плоскости, проходящей через ось  $x$  и начало координат под углом  $\alpha$  к плоскости  $(x, y)$ , где интеграл движения  $l$  определяет наклон этой плоскости:  $\cos \alpha = l$ . При  $l = 1$  угол наклона  $\alpha = 0$  – экватор, как мы видели выше.

Угол  $\varphi_0 \neq 0$  определяет угол поворота линии в плоскости  $(x, y)$ , через которую проходит эта плоскость. Сечение такими плоскостями сферы образует окружности на сфере – *дуги большого круга*, с помощью движения по сфере, совместимые с экватором.

### 5.3 Динамика в неинерциальной системе

Как изменятся уравнения динамики, если система координат является неинерциальной, движущейся относительно инерциальной с полем скоростей  $V^i(x^j)$ ? Нужно обратить внимание на различие постановки вопроса в классической динамике инерциальных систем в евклидовом пространстве, где говорилось не о поле скоростей, а о скорости движения. Фактически и там речь шла о поле скоростей, но это поле во всех точках было одинаковым – в декартовой системе, удовлетворяя соотношению  $\partial_j u^i = 0$ , а в произвольных координатах это соотношение переписывается через ковариантные производные

$$\nabla_j u^i \equiv u^i_{;j} = 0. \quad (5.8)$$

Лагранжиан в неинерциальной системе выражается через скорости относительно абсолютного пространства:

$$L = \frac{1}{2} \gamma_{ij} (\dot{x}^i - V^i)(\dot{x}^j - V^j). \quad (5.9)$$

Выражая скорости через импульсы

$$p_i = \gamma_{ij} (\dot{x}^j - V^j); \quad \dot{x}^i = \gamma^{ij} p_j + V^i,$$

строим гамильтониан

$$H = p_i \dot{x}^i - L = \frac{1}{2} \gamma^{ji}(x) p_j p_i + V^i(x) p_i. \quad (5.10)$$

Уравнения Гамильтона определяют геодезические линии:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma^{jk}}{\partial x^i} p_j p_k - \frac{\partial V^j}{\partial x^i} p_j.$$

Эти уравнения в локально декартовой системе записываются как

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial V^j}{\partial x^i} p_j$$

и для геодезических потоков возвращаются в произвольную систему в ковариантном виде (при  $\gamma^{ij}$  и  $V^i$  стационарных – постоянных во времени)

$$\frac{dp_i}{dt} = -V^j_{;i} p_j; \quad \frac{du^i}{dt} = u^j u^i_{;j} - \gamma^{ik} V_{j;k} (u^j - V^j). \quad (5.11)$$

Уравнения геодезических остаются такими же, как и в инерциальной системе, если  $V_{j;k} = 0$ . Из этого условия следует, что и

$$(\nabla_i \nabla_k - \nabla_k \nabla_i) V_j = -R_{jik}^s V_s = 0.$$

Для выполнения этого условия необходимо, чтобы  $R_{jik}^s = 0$  – пространство должно быть плоским. Только в плоском пространстве возможно однородное поле геодезических линий – это и есть новое евклидово пространство, движущееся относительно исходного с единой скоростью  $\mathbf{V}$ .

Если пространство обладает кривизной, то исходная инерциальная система выделена по отношению к другим. Уравнения движения в искривленном пространстве с любым полем скоростей  $V^i(x)$  отличаются от уравнений движения в инерциальной системе. В случае наличия у пространства кривизны, инерциальная система *экспериментально обнаружима*, принципиально отличается от неинерциальных.

## 5.4 Поля Киллинга и динамика

Некоторые пространства обладают движениями, определяемыми полями Киллинга, сдвиги по которым не меняют метрики. Как наличие движений сказывается на динамике?

Каждому полю Киллинга  $\xi_{(j)}^i(x)$  можно сопоставить линейную по импульсам скалярную функцию  $f_{(j)}$  – номер этого поля, изменяется от 1 до  $k$ , где  $k$  – число линейно независимых полей Киллинга):

$$f_{(j)} = \xi_{(j)}^i p_i. \quad (5.12)$$

Вычислим через скобки Пуассона производную по времени этих функций:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} = \{H, \xi^i(x) p_i\} &= \frac{1}{2} \xi^i \gamma^{kl}{}_{,i} p_k p_l - \xi^i{}_{,k} \gamma^{kl} p_k p_i = \\ &= -\frac{1}{2} (\xi^i{}_{,k} \gamma^{kl} + \xi^l{}_{,k} \gamma^{ki} - \xi^l \gamma^{ki}{}_{,l}) p_k p_i. \end{aligned}$$

Если  $\xi^i(x)$  является полем Киллинга, то правая часть этого выражения обращается в нуль и скобка Пуассона обращается в нуль, следовательно, конструкция  $\xi^i(x) p_i$  является интегралом движения.

Это частный случай *теоремы Нётер*: каждому полю Киллинга  $\xi^i(x)$  соответствует интеграл движения  $\xi^i(x) p_i$ .

## 5.5 Первый закон Ньютона

Если пространство риманово, то первый закон Ньютона нуждается в некоторой корректировке.

*Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного движения по геодезической линии, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.*

Однако в малой области риманово пространство является почти плоским и, введя в этой малой области декартову систему координат (локально декартову), мы получим равномерное и прямолинейное движения тела. Поэтому старая формулировка Первого закона Ньютона остается в силе, но только для малой области, локально.

## 5.6 Равномерное движение трехмерной сферы

По своим геометрическим свойствам трехмерная сфера принципиально отличается от двумерной. Как известно, трехмерная сфера является метрическим многообразием группы  $O[3]$ , а однопараметрические подгруппы являются одновременно геодезическими потоками и полями Киллинга [2]. Назовем такие поля *геотоками*.

Векторные поля (2.16)  $\mu_\alpha^i$  и  $\nu_\alpha^i$ , являющиеся одновременно полями Киллинга и геодезическими потоками, назовем соответственно *левыми* и *правыми геотоками*.

Векторы  $\mu_\alpha^i$  назовем векторами *левой группы*, а  $\nu_\alpha^i$  – векторами *правой группы*. Векторы, принадлежащие одной группе, будем называть *односторонними геотоками*, а разным – *разносторонними геотоками*.

Уравнения Киллинга линейны по полям, и любая линейная комбинация полей Киллинга – левосторонних и правосторонних – есть также поле Киллинга.

Уравнения геодезического потока

$$u^i \nabla_i u^j = 0 \quad (5.13)$$

нелинейны, и суперпозиция геодезических потоков уже не является геодезическим потоком. Пусть имеются два геотока  $u^i$  и  $v^i$ . Их сумма есть вектор Киллинга. Будет ли суммарный поток геодезическим?

$$\begin{aligned} (u^i + v^i) \nabla_i (u^j + v^j) &= u^i \nabla_i u^j + v^i \nabla_i v^j + u^i \nabla_i v^j + v^i \nabla_i u^j = \\ &= u^i \nabla_i v^j + v^i \nabla_i u^j. \end{aligned}$$

Так как эти поля одновременно являются и полями Киллинга, то  $u_{i;k} = -u_{k;i}$  и

$$\begin{aligned} \nabla_i u^j &= \gamma^{jk} u_{k;i} = -\gamma^{jk} u_{i;k}; \\ u^i \nabla_i v^j + v^i \nabla_i u^j &= -\gamma^{jk} (u^i v_{i;k} + v^i u_{i;k}) = -\gamma^{jk} \partial_k (u^i v_i). \end{aligned}$$

Будет ли сумма геотоков геотоком – это определяется их скалярным произведением.

**Теорема 1** *Если скалярное произведение двух геотоков постоянно на всем пространстве, то их сумма также является геотоком.*

Скалярные произведения геотоков внутри каждой группы постоянны:

$$(\mu_\alpha^i \mu_{i\beta}) = \delta_{\alpha\beta}; \quad (\nu_\alpha^i \nu_{i\beta}) = \delta_{\alpha\beta}.$$

Это обеспечивает на основании теоремы 1 выполнение следующей теоремы:

**Теорема 2** *Суперпозиция односторонних геотоков является геотоком.*

Прямой проверкой убеждаемся, что скалярное произведение любых левых и правых геотоков не является константой. Это связано с тем, что при суперпозиции геотоков мы можем распоряжаться лишь шестью константами, а множество значений скалярного произведения на сфере бесконечномерно. Исключением является постоянство скалярных произведений односторонних геотоков.

Отсюда следует

**Теорема 3** *Сумма левого и правого геотоков является полем Киллинга, но не является геодезическим потоком.*

Если в каждой точке сферического пространства поместить пылинку и каждой такой пылинке придать скорость, пропорциональную одному из полей геотоков, то вследствие геодезичности такого поля, двигаясь по инерции, частички будут двигаться вдоль этого поля и само поле скоростей с течением времени меняться не будет.

Так как такое поле скоростей является полем Киллинга, то расстояния между пылинками меняться не будут: в каждый момент времени множество пылинок реализует трехмерную сферу.

Поэтому для реализации инерциальной системы – движущейся в себе трехмерной сферы – нужно брать суперпозицию односторонних геотоков.

Однако по своим механическим свойствам такая движущаяся система отличается от покоящейся. В ней метрика, определяемая движущимися пылинками, такая же, как и неподвижная – метрика трехмерной сферы – и поля Киллинга, поэтому те же самые. Однако в движущейся системе только три геотока – односторонние со скоростью. Векторы Киллинга другой группы уже не являются геодезическими, что определимо экспериментально.

Это очень важный результат: кривизна пространства даже при наличии геодезических движений приводит к единственности абсолютного пространства. Только в евклидовом пространстве имеется вырождение, приводящее к неразличимости равномерно движущихся друг относительно друга систем, сохраняющих метрику пространства.

## 5.7 Нерелятивистское движение

Лагранжиан свободного движения определяется только кинетической энергией, определяемой скоростью движения тела относительно пространства (абсолютной скоростью):

$$L = \frac{1}{2} \gamma_{ij} (\dot{x}^i - V^i)(\dot{x}^j - V^j). \quad (5.14)$$

Импульсы и выраженные через них скорости

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \gamma_{ij} (\dot{x}^j - V^j); \quad \dot{x}^i = \gamma^{ij} p_j + V^i$$

определяют гамильтониан

$$H = p_i \dot{x}^i - L = \frac{\gamma^{ij} p_i p_j}{2} + V^i p_i. \quad (5.15)$$

Здесь  $\gamma^{ij}$  и  $V^i$  – заданные функции координат и времени. Далее описание движения идет на основании уравнений Гамильтона или скобок Пуассона.

### 5.7.1 Движение в поле Бьерна

Рассмотрим нерелятивистское движение свободного тела в поле Бьерна (4.4). Лагранжиан состоит только из кинетической энергии, поэтому движение не зависит от массы и ее можно положить равной единице. Так как поле скоростей радиально, запишем лагранжиан в сферической системе координат. Он выражается через *абсолютную скорость* тела – скорость относительно пространства:

$$L = \frac{1}{2} ((\dot{r} - V^r(r))^2 + r^2 \dot{\varphi}^2).$$

Координата  $\varphi$  – циклическая, сопряженный ей момент постоянен при движении:

$$p_\varphi \equiv l = r^2 \dot{\varphi}; \quad \dot{\varphi} = \frac{l}{r^2}.$$

$$p_r \equiv p = \dot{r} - V^r(r); \quad \dot{r} = p + V^r(r).$$

Гамильтониан также постоянен

$$H = p \dot{r} - \frac{1}{2} \left( p^2 + \frac{l^2}{r^2} \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left( \dot{r}^2 + V^r(r)^2 + \frac{l^2}{r^2} \right) = \frac{1}{2} \left( \dot{r}^2 + \frac{l^2}{r^2} \right) - \frac{kM}{r} = E.$$

Это выражение в точности совпадает с классическим гамильтонианом для тела, движущегося в потенциальном поле  $\phi = -kM/r$  и приводит к тем же решениям, что и при использовании гравитационного потенциала: движения по окружностям, эллипсам, параболам и гиперболам.

Учет неинерциальности системы при описании движения тел эквивалентен учету гравитационного потенциала в предположении инерциальности системы.

### 5.7.2 Движение в поле вихревого монополя

Рассмотрим нерелятивистское движение тела в поле вихревого монополя ( $l = -3$ ) с метрикой (4.10) с метрическим полем (4.22)

$$\Omega \equiv V^\varphi = \frac{q}{r^3}; \quad w_{-3}(r, \vartheta) = \frac{9q^2}{8r^4} \sin^4 \vartheta.$$

Ограничимся случаем движение в “экваториальной плоскости” монополя  $\vartheta = \pi/2$ . При этом зависимость действия и всех функций от  $\vartheta$  исчезает, в частности,

$$w \equiv w_{-3}(r, \pi/2) = \frac{9q^2}{8r^4}.$$

Вследствие осевой симметрии переменная  $\varphi$  является циклической и сопряженный ей импульс постоянен  $p_\varphi = l$ .

Гамильтониан (5.15) сохраняется

$$e^{-w} p_r^2 + \frac{l^2}{r^2} + 2\Omega l = 2E,$$

откуда можно выразить радиальный импульс

$$p_r = e^{w/2} \sqrt{2E - \frac{2ql}{r^3} - \frac{l^2}{r^2}}.$$

Уравнение траектории получается дифференцированием этого импульса по моменту:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\partial p_r}{\partial l} = -\frac{\frac{l}{r^2} + \frac{q}{r^3}}{\sqrt{2E - \frac{2ql}{r^3} - \frac{l^2}{r^2}}} e^{w/2}.$$

Как в большинстве подобных задач, удобно перейти к переменной  $x = l/r$ ;  $dx = -l/r^2 dr$ . Введя также параметр  $\alpha = q/l^2$ , последнее выражение приведем к виду:

$$d\varphi = \frac{(1 + \alpha x) dx}{\sqrt{2E - 2\alpha x^3 - x^2}} e^w.$$

Возведя в квадрат, это выражение можно переписать в виде гамильтониана одномерного движения:

$$e^w \frac{(1 + \alpha x)^2}{2} \left( \frac{dx}{d\varphi} \right)^2 + \left( \frac{x^2}{2} + \alpha x^3 \right) = E. \quad (5.16)$$

Для приведения кинетической энергии к виду кинетической энергии свободной частицы нужно провести замену переменных:

$$e^{w/2} (1 + \alpha x) dx = dy.$$

Найдем точки равновесия – минимум “потенциальной энергии”:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^2}{2} + \alpha x^3 \right) = x(1 + 3\alpha x) = 0.$$

Их - две:  $x_1 = l/r = 0$  соответствует точкам, покоящимся на бесконечном удалении от монополя. Вторая точка  $3\alpha x_2 = 3q/(lr_2) = -1$  соответствует телу, вращающемуся по круговой орбите радиуса  $r_2$  против вихревого поля с моментом количества движения

$$l = -\frac{3q}{r_2}.$$

Эта точка кругового движения неустойчива: все тела (звезды) с меньшим радиусом (большим  $x$ ), вращаясь, начинают падать на центр – захватываются монополем.

## 5.8 Движение света

Распространение света описывается уравнением эйконала как в классической, так и в релятивистской физике. Квадратичная зависимость между частотой и волновым вектором и в классической физике учитывает релятивистские соотношения для света.

В инерциальной системе имеющего уравнение эйконала имеет вид:

$$\left( \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - \gamma^{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^j} = 0.$$

Обычно обозначают

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\omega; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x^i} = k_i. \quad (5.17)$$

В неинерциальной системе производная по времени меняется на ковариантную в соответствии с (2.1):

$$\frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + V^i \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \right)^2 - \gamma^{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^j} = 0$$

и уравнение эйконала принимает вид:

$$\frac{(\omega - V^i k_i)^2}{c^2} = \gamma^{ij} k_i k_j. \quad (5.18)$$

Зависимость поля скоростей от координат приводит к отклонению луча от прямой линии.

### 5.8.1 Распространение света вблизи Солнца

Вблизи Солнца имеется радиальное поле скоростей Бьёрна (4.4), но само пространство плоское.

Уравнение эйконала (5.18) в сферической системе координат приобретает следующий вид:

$$k_r^2 + \frac{k_\varphi^2}{r^2} - \frac{(\omega + V(r) k_r)^2}{c^2} = 0,$$

где  $\omega$  и  $k_\varphi$  являются константами.

Если рассматривается стационарная задача, то можно ввести

$$k_r = \frac{\omega}{c} n; \quad k_\varphi = \frac{\omega}{c} l; \quad n^2 + \frac{l^2}{r^2} - (1 + \beta n)^2 = 0; \quad \beta = \frac{V}{c} = \sqrt{\frac{2kM}{c^2 r}}.$$

Выразим отсюда  $n$

$$n = \frac{\beta}{1 - \beta^2} \pm \frac{\sqrt{1 - (l/r)^2(1 - \beta^2)}}{1 - \beta^2}.$$

Траектория луча находится из дифференциального уравнения

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\partial n}{\partial l} = \frac{-l/r^2}{\sqrt{1 - (l/r)^2(1 - \beta^2)}} = \frac{-l/r^2}{\sqrt{1 - (l/r)^2(1 - \frac{2kM}{c^2 r})}}.$$

Переходя к переменной  $\xi = l/r$ , получаем

$$d\varphi = \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2(1 - 2\alpha\xi)}}; \quad \alpha = \frac{kM}{c^2 l}. \quad (5.19)$$

Если положить  $\alpha = 0$ , это дифференциальное уравнение имеет решение

$$\xi = \frac{l}{r} = \cos \varphi.$$

При изменении  $\varphi$  от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$  оно описывает прямую, проходящую на расстоянии  $l$  от центра тяготеющего тела.

Найдем решение уравнения (5.19) в первом порядке по  $\alpha$ :

$$\xi = \cos(\varphi - \alpha\varepsilon(\varphi)) \approx \cos \varphi + \alpha\varepsilon \sin \varphi.$$

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = -\sin \varphi + \alpha(\sin \varphi \frac{d\varepsilon}{d\varphi} + \varepsilon \cos \varphi).$$

Возведя в квадрат и подставив в (5.19), где сохраним только линейные по  $\alpha$  члены, получим дифференциальное уравнение для  $\varepsilon$ :

$$\frac{d\varepsilon}{d\varphi} = -\frac{\cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi},$$

которое легко интегрируется:

$$\varepsilon = \frac{1}{\sin \varphi} + \sin \varphi,$$

и окончательно

$$x = \frac{p_\varphi}{r} = \cos \varphi + \alpha(1 + \sin^2 \varphi). \quad (5.20)$$

Луч приходит из бесконечности и уходит на бесконечность ( $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ). При этом  $\varphi$  получает малую добавку по отношению к  $\pm\pi/2$ , где  $\sin^2 \varphi \approx 1$ , а  $\cos(\pm\pi/2 + \delta) \approx \pm\delta$ :

$$\delta \approx 2\alpha = \frac{2kM}{Rc^2},$$

если свет двигался по траектории, проходящей на ближайшем расстоянии от тела – его радиуса  $R$ . Полный угол отклонения его от прямой складывается из отклонений слева и справа и равен  $2\delta = 4km/(Rc^2)$ .

Для Солнца  $\alpha = 2.25 \cdot 10^{-6}$ , что дает полный угол отклонения  $1.7''$ .

Экспериментально отклонение было измерено во время полного солнечного затмения 29 мая 1919 года экспедицией под руководством А. Эддингтона. Замеренная величина лежала в интервале  $0.9'' - 1.8''$ .

### 5.8.2 Распространение света в плоской космологической модели

В космологических моделях почти всегда поле скоростей равно нулю – мы работаем в глобальной инерциальной системе. В плоской космологической модели с метрикой

$$dl^2 = m^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

уравнение эйконала

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{m^2(t)} \mathbf{k}^2 = 0 \quad (5.21)$$

имеет циклическими координатами  $x, y, z$  и поэтому вектор  $\mathbf{k}$  постоянен,  $\mathbf{k}^2 = k^2$ . Поэтому частота света изменяется обратно пропорционально изменению масштаба:

$$\omega = \frac{k c}{m(t)}. \quad (5.22)$$

С ростом масштаба Мира частота электромагнитного излучения падает.

Открытие в 1963 году длинноволнового *реликтового излучения* радиоинженерами Пензиасом и Вильсоном подтвердило гипотезу о горячей вселенной с высокотемпературным электромагнитным излучением, которое по мере расширения Вселенной уменьшало свою частоту и дошло до нас уже в радиодиапазоне.

### 5.8.3 Космические линзы

В современной космологии исключительно интересное явление представляют “космические линзы”, в которых одни и те же звезды видны двукратно и даже четырехкратно. Этот эффект говорит о том, что пространство в этой области сильно искажено, сильно отличается от евклидова – как свили на стекле. Ниже мы приведем пример распространения света в вихревом поле, где может наблюдаться удвоение объекта.

Уравнение эйконала в вихревом поле (4.10)

$$\frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right)^2 = e^{-w} \left( \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right)^2 \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right)^2.$$

Выбрав переменные

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \omega; \quad \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} = 0; \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}; \quad \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \frac{\omega}{c} l; \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\omega}{c} n,$$

приведем это уравнение к виду

$$(1 + l\Omega)^2 = n^2 + \frac{l^2}{r^2},$$

откуда можно выразить радиальную компоненту волнового вектора

$$n = \sqrt{(1 + l\Omega)^2 - \frac{l^2}{r^2}}.$$

Уравнение луча, как всегда, получается дифференцированием

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\partial n}{\partial l} = \frac{-\frac{l}{r^2} + \Omega}{\sqrt{(1 + l\Omega)^2 - \frac{l^2}{r^2}}} \approx \frac{-\frac{l}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2}}} + \frac{\Omega}{\left(\sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2}}\right)^3}.$$

Подставим теперь поле абсолютных скоростей вихревого монополя с интенсивностью  $q$  (4.18):

$$\Omega = \frac{q}{r^3}; \quad w_{-3} = -\frac{9q^2}{8r^4} \sin^4 \vartheta \approx 0,$$

после чего уравнение луча конкретизируется:

$$d\varphi = \frac{d\frac{l}{r}}{\sqrt{1 - \left(\frac{l}{r}\right)^2}} + \frac{\frac{q}{r^3} dr}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2}}} = d\eta + \frac{q}{l^2} d\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2}}},$$

где

$$r \sin \eta = l;$$

Если луч приходит из бесконечности и возвращается на бесконечность, то

$$\varphi = \eta \pm \frac{q}{l^2}.$$

Таким образом, луч искривляется. Если источник и наблюдатель находятся в плоскости  $\vartheta = \pi/2$ , то один и тот же источник может быть виден дважды с угловым расстоянием между изображениями  $\delta\varphi = 2q/l^2$ . Это одна из моделей “космической линзы”.

## 5.9 Релятивистская динамика

Так как метрический тензор трехмерного пространства зависит от координат и времени – четырех переменных, – при построении эволюции трехмерного пространства в конце концов строится четырехмерное многообразие. Специальная теория относительности делает это многообразие четырехмерным псевдоримановым пространством.

ТГВ включает в себя специальную теорию относительности, определяющую локальные свойства пространства и времени.

Наряду с глобальным временем, в котором происходит развитие мира в целом, у движущегося наблюдателя события развиваются в его локальной системе в *собственном времени*.

### 5.9.1 Собственное время движущегося тела

Наряду с глобальным временем, в котором происходит развитие мира в целом, у движущегося наблюдателя события развиваются в его локальной системе в *собственном времени* (“местное время” Лоренца), в инерциальной системе выражаемого через метрику пространства и скорости движения  $\dot{x}^i$

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \gamma_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j},$$

а в неинерциальной системе – через *абсолютные скорости*:

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \gamma_{ij} (\dot{x}^i - V^i)(\dot{x}^j - V^j)} = dt \sqrt{g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta},$$

где последнее выражение представлено в четырехмерном виде, при объединении времени и пространства в единое четырехмерное многообразие с  $x^0 = ct$  и метрикой

$$g_{00} = 1 - \frac{1}{c^2} \gamma_{ij} V^i V^j; \quad g_{0i} = \frac{1}{c} \gamma_{ij} V^j; \quad g_{ij} = -\gamma_{ij}. \quad (5.23)$$

Обратный метрический тензор этого четырехмерного многообразия

$$g^{00} = 1; \quad g^{0i} = \frac{V^i}{c}; \quad g^{ij} = \frac{V^i V^j}{c^2} - \gamma^{ij}.$$

Важнейшим здесь является первое выражение

$$g^{00} = 1. \quad (5.24)$$

Это основное структурное соотношение глобального времени, аналогичное метрике Минковского, являющейся основным структурным соотношением в специальной теории относительности.

### 5.9.2 Движение материальной точки

ТГВ учитывает специальную теорию относительности не только принятием собственного времени для движущихся объектов, но и релятивистским описанием движения материальных точек и света.

Локально, в точке нахождения частицы пространство и время метризованы метрикой Минковского. Производные от действия частицы образуют четырехмерный вектор. Если ввести вместо действия  $S$  пропорциональную функцию  $s = S/mc$ , уравнение становится не зависимым от массы, что и выражает в самом общем виде принцип независимости ускорения от массы. В инерциальной системе инвариант этого вектора приводит к релятивистскому уравнению Гамильтона-Якоби:

$$\frac{1}{c^2} \dot{s}^2 - \gamma^{ij} s_{,i} s_{,j} = 1.$$

В неинерциальной системе производная по времени заменяется на ковариантную, что для скалярной функции – действия – приводит к замене

$$D_t s = \frac{\partial s}{\partial t} + V^i \partial_i s,$$

в результате чего уравнение Гамильтона-Якоби приобретает вид:

$$\frac{1}{c^2} (\dot{s} + V^i s_{,i})^2 - \gamma^{ij} s_{,i} s_{,j} = 1. \quad (5.25)$$

Это уравнение и определяет движение свободных частиц в различных динамических римановых пространствах.

Обозначая

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -c\epsilon; \quad \frac{\partial s}{\partial x^i} = p_i,$$

получаем релятивистское уравнение связи безразмерных энергии и импульсов

$$F(\epsilon, p_i, t, x^i) = \frac{c}{2} \left( 1 + \gamma^{ij} p_i p_j - \left( \epsilon - \frac{V^i}{c} p_i \right)^2 \right) = 0, \quad (5.26)$$

определяющее динамику свободной материальной точки по некоторому параметру  $\tau$  (собственному времени), производную по которому обозначаем точкой:

$$\begin{aligned} \dot{t} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial \epsilon} = \epsilon - \frac{V^i}{c} p_i; \\ \dot{x}^i &= \frac{\partial F}{\partial p_i} = c \gamma^{ij} p_j + V^i \left( \epsilon - \frac{V^i}{c} p_i \right); \\ \dot{\epsilon} &= \frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial t}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial F}{\partial x^i}; \end{aligned} \quad (5.27)$$

Из первой пары следует

$$\frac{dx^i}{d\tau} - V^i \frac{dt}{d\tau} = c \gamma^{ij} p_j; \quad p_k = \frac{\gamma_{ki}}{c} \left( \frac{dx^i}{d\tau} - V^i \frac{dt}{d\tau} \right).$$

Подставляя эти соотношения в уравнение связи (5.26), получим

$$\left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{\gamma_{ij}}{c^2} \left( \frac{dx^i}{d\tau} - V^i \frac{dt}{d\tau} \right) \left( \frac{dx^j}{d\tau} - V^j \frac{dt}{d\tau} \right) = 1,$$

откуда следует, что параметр

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2} \gamma_{ij} (dx^i - V^i dt)(dx^j - V^j dt)} \quad (5.28)$$

– собственное время движущейся частицы.

В любой метрике и при любом поле скоростей имеются решения для когерентных частиц ( $p_i = 0$ ;  $\epsilon = 1$ ;  $\dot{x}^i = V^i$ ) – покоящихся относительно пространства.

При наличии электромагнитного поля уравнение связи (5.26) корректируется потенциалом электромагнитного поля  $A_i$ ,  $\phi$  и зависит от отношения заряда к массе движущейся частицы  $q/(mc)$ . Оно представляется как

$$F = \frac{c}{2} \left( 1 + \gamma^{ij} \left( p_i - \frac{q}{mc} A_i \right) \left( p_j - \frac{q}{mc} A_j \right) - \right.$$

$$\left( \epsilon - \frac{q\phi}{mc^2} + \frac{V^i}{c} \left( p_i - \frac{q}{mc} A_i \right) \right)^2. \quad (5.29)$$

## 5.10 Релятивистское движение в поле Бьерна

Мы уже рассматривали в классической, нерелятивистской области движение частиц в поле Бьерна – в поле скоростей, создаваемом сферически симметричным телом.

Теперь мы рассмотрим ту же задачу для релятивистских частиц – с учетом теории относительности. Пространство плоское. Вследствие сферической симметрии задачи удобно работать в сферической системе координат:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

Поле скоростей (4.4) радиально

$$V^r = V = \sqrt{\frac{2kM}{r}},$$

и связь безразмерной энергии и импульсов принимает вид:

$$\left( \epsilon - \frac{V}{c^2} p_r \right)^2 - \left( p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left( p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} \right) \right) = 1.$$

Функция связи (5.26) представляется как

$$F = c \frac{1 - \epsilon^2}{2} - \sqrt{\frac{2kM}{r}} \epsilon p_r + c \left( 1 - \frac{2kM}{rc^2} \right) \frac{p_r^2}{2} + \frac{cL^2}{2r^2}, \quad (5.30)$$

где введен оператор квадрата полного момента

$$L^2 = p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta}, \quad (5.31)$$

коммутирующий в смысле скобок Пуассона с функцией связи (5.30), а потому величина его на траектории постоянна (обозначим ее  $l^2$ ).

Это позволяет провести поворот в координатах  $\theta, \varphi$  так, чтобы траектория движения лежала в сечении  $\theta = \pi/2$  при  $\dot{\theta} = p_\theta = 0, \dot{\varphi} = 0$ .

Циклическими переменными являются  $t$  и  $\varphi$ , что приводит к сохранению энергии  $p_t = \epsilon$  и момента  $p_\varphi = l$ . При этом функция связи принимает вид:

$$\frac{2F}{c} = 1 - \epsilon^2 \mp \frac{V}{c} \epsilon p_r + \left( U p_r^2 + \frac{l^2}{r^2} \right) = 0; \quad U = 1 - \frac{2kM}{r c^2}. \quad (5.32)$$

Выразим импульс  $p_r$  из условия равенства нулю функции (5.32):

$$p_r = \frac{\epsilon V}{1 - V^2} \pm \frac{\sqrt{\epsilon^2 V^2 - (1 - \epsilon^2 + l^2/r^2)(1 - V^2)}}{1 - V^2}.$$

Уравнение траектории получается дифференцированием его по моменту:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\partial p_r}{\partial l} = \frac{-l/r^2}{\sqrt{\epsilon^2 - 1 + 2M/r - l^2/r^2(1 - 2M/r)}}.$$

После введения переменной  $\xi = l/r$  и константы  $\alpha = M/l$  и возведения в квадрат, приведем это уравнение к виду:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\xi}{d\varphi} \right)^2 + U(\xi) = \lambda; \quad U(\xi) = \frac{\xi^2}{2} - \alpha \xi - \alpha \xi^3; \quad \lambda = \frac{\epsilon^2 - 1}{2}. \quad (5.33)$$

Оно имеет вид одномерной динамической задачи, в которой роль времени играет угол  $\varphi$ , а потенциальная энергия определяется функцией  $U(\xi)$ . Нерелятивистское движение получается из выражения (5.33) пренебрежением в  $U(\xi)$  кубическим членом.

### 5.10.1 Движение по окружности

Движению по окружности в представлении (5.33) соответствует точка равновесия – радиус не меняется, набегает только угол.

$$\frac{dU}{d\xi} = \xi - \alpha - 3\alpha \xi^2 = 0. \quad (5.34)$$

В отличие от нерелятивистского случая это уравнение – квадратное, то есть возможны два корня этого уравнения. Производная потенциала  $U(\xi)$  в нуле отрицательна, поэтому первый корень соответствует минимуму этой функции, а второй – максимуму:

$$\xi_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 12\alpha^2}}{6\alpha}; \quad \xi_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 12\alpha^2}}{6\alpha}.$$

Эти два корня сливаются при  $\alpha^2 = 1/12$  – это максимальное значение параметра  $\alpha$ , при котором круговое движение еще возможно.

Из уравнения (5.34) можно выразить момент через радиус круговой орбиты  $R$ :

$$l^2 = \frac{MR}{1 - 3M/R}. \quad (5.35)$$

При больших радиусах это соотношение совпадает с нерелятивистским выражением  $l^2 = MR$ , являющимся следствием формулы классического центростремительного ускорения. Однако, в отличие от классического соотношения с уменьшением радиуса момент уменьшается не монотонно, а имеет минимум при  $R = 6M$  и при дальнейшем уменьшении радиуса стремится к бесконечности при  $R = 3M$ .

Подставив выражение для момента (5.35), выразим корни через радиус орбиты:

$$1 - 12\alpha^2 = 1 - 12\frac{M^2}{MR} \left(1 - 3\frac{M}{R}\right) = \left(1 - 6\frac{M}{R}\right)^2.$$

При движении по окружности “кинетическая энергия” в (5.33) равна нулю, и из соотношения  $U(\xi_1) = \lambda$  находится энергия движущегося тела  $\epsilon$ :

$$\epsilon^2 = \frac{(1 - 2M/R)^2}{1 - 3M/R}. \quad (5.36)$$

Если в классической механике энергия непрерывно убывает с уменьшением радиуса круговой орбиты, то в релятивистской она имеет минимум при  $R = 6M$ . При дальнейшем уменьшении радиуса до минимально возможного  $R = 3M$  энергия возрастает до бесконечности. Таким образом,  $R = 6M$  – это единственная устойчивая круговая орбита ([8]).

На устойчивой орбите момент  $l = R/\sqrt{3}$ .

### 5.10.2 Вращение перигелия Меркурия

Если в окрестности круговой орбиты (точки равновесия  $\xi_1$ ) имеется малая кинетическая энергия, то точка  $\xi$  будет совершать колебания вблизи точки  $\xi_1$  с частотой (по  $\varphi$ ), определяемой второй производной потенциальной энергии  $U(\xi)$ :

$$\Omega^2 = \frac{d^2U}{d\xi^2} \Big|_{\xi_1} = 1 - 6\alpha\xi_1 = \sqrt{1 - 12\alpha^2} = 1 - 6\frac{M}{R}.$$

Вернемся теперь к размерным переменным. Полное колебание между минимумом и максимумом совершается при повороте на угол  $\Phi = 2\pi/\Omega$ :

$$\Omega \approx 3\frac{kM}{Rc^2}; \quad \Phi \approx 2\pi \left( 1 + 3\frac{kM}{Rc^2} \right).$$

Таким образом, за каждый оборот по орбите перигелий смещается на угол

$$\Delta\varphi = \Phi - 2\pi = 6\pi \frac{kM}{Rc^2}$$

по направлению движения по орбите. Орбита оказывается незамкнутой.

При движении по почти круговой орбите

$$\frac{kM}{R^2} = \frac{v^2}{R}; \quad \frac{kM}{Rc^2} = \frac{v^2}{c^2}.$$

Этим дано объяснение *вращению перигелия Меркурия*, зафиксированное за три столетия наблюдений со времен датского астронома Тихо Браге (1546 - 1601): большая ось эллиптической орбиты Меркурия за столетие поворачивается на угол порядка 40 угловых секунд. Так как период обращения Меркурия вокруг Солнца 88 суток, то за столетие он делает 415 оборотов, так что за каждый оборот его большая полуось поворачивается на 0.1 секунды. Среднее расстояние Меркурия от Солнца 58 млн. км, при этом средняя скорость вращения 48 км/с, так что  $v/c = 1.6 \cdot 10^{-4}$ . Отсюда  $\delta\varphi = 3 \cdot 360 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 2.56 \cdot 10^{-8} = 0.1''$ , что очень хорошо совпадает с замеренной величиной.

## Глава 5

# Общая теория относительности

Общая теория относительности была создана в 1911 - 1915 годах Альбертом Эйнштейном (1879 – 1955), одним из создателей специальной теории относительности. Именно поэтому путь развития теории пространства и времени лежал в обобщении четырехмерной геометрии, и динамика трехмерного пространства в этих построениях затерялась.

### 6.1 Краткая история

В теории любого поля есть две стороны: как это поле влияет на другие физические процессы и как это поле формируется.

Ответ на первый вопрос Эйнштейну дал *принцип эквивалентности*: для того, чтобы определить влияние гравитации на то или иное физическое явление (локальное), нужно перейти в свободно падающую систему, описать это явление как в инерциальной системе без гравитационного поля, а затем вернуться в исходную лабораторную систему, используя преобразования изучаемых физических величин при переходе из одной движущейся системы в другую.

Отметим, однако, что эта методика применима лишь к *локальным*

*явлениям*, таким как электродинамика, гидродинамика, уравнения которых определяются в бесконечно малой области, и не применима к глобальным явлениям, связанным с некоторым распределенным состоянием, таким как статистическая физика, где состояние задается в некотором объеме пространства, или квантовая механика, где волновая функция также нелокальна.

Поиск ответа на второй вопрос: как же формируется гравитационное поле, занял у Эйнштейна несколько лет, и здесь ему существенно помогли два математика: Марсель Гроссман и Давид Гильберт.

Уже в 1906 году Макс Планк сформулировал принцип наименьшего действия для описания движения материальных тел в СТО

$$S = -mc \int ds = -mc \int \sqrt{c^2 - \mathbf{v}^2} dt = \int L dt. \quad (6.1)$$

Для инерциальной системы отсюда следует первый закон Ньютона: свободные тела движутся равномерно и прямолинейно. В поле тяжести траектории тел искривляются, для чего чисто математически (из уравнений Лагранжа) требуется, чтобы лагранжиан зависел от координат. Единственная величина, которая в него входит, это скорость света  $c$ . Если она будет зависеть от координат, то траектории тел в пространстве - времени будут искривляться. При этом масса в действие входит как множитель – это значит, что искривление не будет зависеть от массы, так как в уравнениях Лагранжа общий множитель сокращается. Это объясняет открытую еще Галилеем одинаковость ускорений в поле тяжести для всех тел, независимо от их масс.

Но откуда находить эту зависимость скорости света от координат? Как ее связать с классическим гравитационным потенциалом Лапласа?

В это время Эйнштейн начинает сотрудничать с математиком Марселем Гроссманом, занимавшимся исключительно модной в то время математической теорией *исчислением Риччи* – кривизной многомерных римановых пространств. Гроссман объясняет Эйнштейну, что выражение (6.1) есть лишь частный вид общего инварианта, который в общем виде для четырехмерного пространства записывается через 10 компонент метрического тензора  $g_{\alpha\beta}$  [10]:

$$S = -mc \int ds = -mc \int \sqrt{g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta}. \quad (6.2)$$

Вместо одного гравитационного потенциала Лапласа появляется 10 компонент метрики, 10 потенциалов! Эйнштейн анализирует переход к слабым гравитационным полям, рассматривая малые отклонения пространства от плоского, показывает, что при малых скоростях существенное влияние на движение частиц оказывает лишь компонента метрики  $g_{00}$ , которая и связана с гравитационным потенциалом Лапласа:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}. \quad (6.3)$$

Это суть *принципа соответствия* – соответствия вновь строящейся теории классической механике, зарекомендовавшей себя как исключительно точный инструмент в небесной механике.

Потенциал Лапласа удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\phi = 4\pi k\rho. \quad (6.4)$$

Каким же уравнениям должны удовлетворять 10 компонент метрического тензора, чтобы в пределе переходить в это уравнение для единственно значимой компоненты метрики?

После четырех лет поиска, проработки различных вариантов, уходя от идей Гроссмана и вновь возвращаясь к ним, Эйнштейн формулирует, наконец, дифференциальные уравнения, из которых как будто можно определить метрику. Основной конструкцией, определяющей кривизну, является тензор четвертого ранга Римана - Кристоффеля, имеющий в четырехмерном пространстве 20 компонент, а свертка его по двум индексам приводит к симметричному тензору второго ранга, тензору Риччи, имеющего, как метрический тензор, 10 компонент и образованный из вторых (и менее) производных метрического тензора. Эйнштейн выдвигает тензорные уравнения

$$R_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}, \quad (6.5)$$

где справа стоит тензор энергии-импульса вещества. Он показывает, что при соответствующем подборе постоянной  $\kappa$  в приближении слабого поля эти уравнения переходят в уравнение Пуассона (6.4).

В 1915 году Эйнштейн применяет эти уравнения для корректировки ньютоновского описания движения планет вокруг Солнца и вычисляет непонятный до этого поворот орбиты Меркурия на 40 угловых секунд в столетие, определенный за триста лет тщательных

наблюдений со времен Тихо Браге. Совпадение вычисленной величины поворота с экспериментальной убеждает Эйнштейна в правильности исходных посылок и полученных уравнений (ср. п. 5.10.2).

К этому времени за работой Эйнштейна начинает следить патриарх математики начала XX века Давид Гильберт. Он показывает, что в общем случае, уравнения Эйнштейна (6.5) несовместны: тензор энергии - импульса имеет нулевую дивергенцию  $\nabla_\alpha T_\beta^\alpha = 0$ , в то время как тензор Риччи такому тождеству не удовлетворяет.

Эйнштейн в том же 1915 году корректирует теорию и формулирует 10 уравнений Эйнштейна:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \equiv G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi k}{c^4} T_{\alpha\beta}. \quad (6.6)$$

Настоящий триумф ОТО переживает в 1919 году, когда во время полного солнечного затмения Эддингтон замеряет угловое отклонение положения звезды вблизи закрытого Луной Солнца, прекрасно совпадающее с вычислениями по теории Эйнштейна (менее двух угловых секунд – ср. п. 5.8.1). Теория, предсказывающая столь тонкие явления, основанная на исключительно глубоких физических принципах и использующая самые современные высоты математики, сама оказывается вершиной теоретической физики.

## 6.2 Вклад Гильберта

Давид Гильберт продемонстрировал вывод уравнений Эйнштейна из вариационного принципа [5] с действием, инвариантным относительно произвольных преобразований четырех координат:

$$S = -\frac{c^4}{16\pi k} \int R \sqrt{g} d_4x + S_m, \quad (6.7)$$

где  $R$  – скалярная кривизна четырехмерного пространства - времени,  $g$  – детерминант матрицы четырехмерного метрического тензора, константа  $k$  – замеренная Генри Кэвендишем ньютоновская гравитационная постоянная, – а  $S_m$  – действие прочей материи, как и скалярная кривизна, зависящее от метрического тензора и его производных.

По теореме Гильберта вариации действия прочей материи по четырехмерному метрическому тензору определяют компоненты тензора энергии-импульса:

$$\frac{\delta S_m}{\delta g^{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} T_{\alpha\beta}.$$

Требование обращения в нуль вариаций полного действия (6.7) по десяти компонентам метрического тензора приводит к десяти уравнениям Эйнштейна.

## 6.3 Основные решения

### 6.3.1 Метрика Шварцшильда

Первое точное решение уравнений Эйнштейна пришло в конце 1915 года из германского военного госпиталя от смертельно больного известного физика Карла Шварцшильда (1873 – 1916). Метрика описывает пространство - время вне сферически симметричного тела массы  $M$ :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2kM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2kM}{c^2 r}\right)} - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (6.8)$$

В коэффициенты метрики масса входит в виде единственного параметра  $\alpha = 2kM/(c^2 r)$ , стремящегося к нулю при  $r \rightarrow \infty$ , при этом метрика Шварцшильда переходит в метрику плоского пространства Минковского в сферической системе координат.

Константы, входящие в этот параметр, можно объединить в одну константу

$$r_g = 2kM/c^2, \quad (6.9)$$

имеющую размерность длины и называемую *гравитационным радиусом* тела с массой  $M$ . В коэффициенты метрики этот параметр входит в комбинации  $1 - r_g/r$ , мало отличающейся от единицы на больших расстояниях, но при  $r \rightarrow r_g$  происходит качественное преобразование метрики: коэффициент перед  $dt^2$  становится отрицательным. Это значит, что в этой области не может быть покоящихся тел, так как интервал для таких тел становится пространственно подобным.

Гравитационный радиус пропорционален массе тела. Максимальное значение  $\alpha = r_g/r$  ограничивается радиусом тела  $R$ . Например, для Земли отношение гравитационного радиуса к радиусу Земли очень мало:

$$\frac{kM}{R^2} = g; \quad \frac{r_g}{R} = \frac{2gR}{c^2} = 7 \cdot 10^{-10}.$$

Исследованию черных дыр посвящен огромный объем литературы. Упомянем лишь одну проблему: в решении Шварцшильда  $M$  возникает как параметр интегрирования, могущий принимать как положительные, так и отрицательные значения. И этой проблеме посвящено немало литературы.

Однако в ТГВ эта константа интегрирования может быть только положительной (см. стр. 66).

Шварцшильд нашел также и “внутреннее решение” уравнений Эйнштейна, полагая это тело внутри состоящим из идеальной несжимаемой жидкости. Это второе решение Шварцшильда не было так канонизировано в литературе ОТО, так как специалисты полагают, что несжимаемой жидкости быть не может – в ней скорость звука бесконечна, а это запрещено специальной теорией относительности. Однако в задачах, где скорость звука и сжимаемость жидкости не играют большой роли, как раз для астрономических тел с малым отношением  $r_g/R$ , внутреннее решение Шварцшильда является вполне приемлемым приближением, но здесь мы его обсуждать не будем.

### 6.3.2 Решение Керра

В 1963 году Патрик Керр нашел более общее вакуумное решение уравнений Эйнштейна, в которое, кроме массы, входит еще параметр  $a$ , которому пропорционален момент количества движения вращающегося тела с массой  $M$ . При  $a = 0$  это решение переходит в решение Шварцшильда [3]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\vartheta^2 - \frac{w}{\rho^2} \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + 2 \frac{r_g r a}{\rho^2} \sin^2 \vartheta d\varphi dt, \quad (6.10)$$

где

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr; \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta; \\ w = (r^2 + a^2)\rho^2 + 2Mr a^2 \sin^2 \vartheta.$$

## 6.4 Космология

Наибольшее влияние на науку XX века оказало полученное в 1922 году решение А.А. Фридмана (1888 – 1925): динамика мира в виде трехмерной сферы с радиусом, зависящим от времени [11]. Как и предыдущие космологи, Фридман рассматривал вещество, заполняющее Вселенную, как пылевидную материю без давления – “звездную пыль” – с некоторой плотностью  $\rho$ , определяемой полной массой этой пыли  $M$  и радиусом Мира  $r$ . Так как объем трехмерной сферы равен  $2\pi^2 r^3$  (1.38), то плотность определяется выражением:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{2\pi^2 r^3}. \quad (6.11)$$

Плотность энергии “звездной пыли”  $\varepsilon = \rho c^2$ .

Из уравнений Эйнштейна существенным (из-за высокой симметрии) оказывается только одно:

$$G_0^0 = \frac{8\pi k}{c^4} \varepsilon. \quad (6.12)$$

Компонента тензора Эйнштейна для трехмерной сферы (при обозначении точкой производной по  $ct$ )

$$G_0^0 = 6 \left( \frac{\dot{r}^2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \right)$$

приводит к уравнению динамики “радиуса Мира”:

$$6 \left( \frac{\dot{r}^2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \right) = \frac{4kM}{\pi c^2} \frac{1}{r^3}, \quad (6.13)$$

которое можно привести к виду:

$$r(\dot{r}^2 + 1) = r_m, \quad r_m = \frac{2kM}{3\pi c^2}. \quad (6.14)$$

Здесь  $r_m$  – максимальный “радиус Мира”, пропорциональный полной массе вещества в нем. Это дифференциальное уравнение интенсивно изучалось еще в 17-м веке Декартом, Ферма, Гюйгенсом. Решение его – циклоида. Оно довольно просто выглядит в параметрическом виде:

$$t = \frac{r_m}{2c}(\varphi - \sin \varphi); \quad r = \frac{r_m}{2}(1 - \cos \varphi). \quad (6.15)$$

С ростом параметра  $\varphi$  радиус совершает периодические изменения от нуля до  $r_m$  и затем опять до нуля за период  $2\pi$ , а время при этом увеличивается на  $\pi r_m/c$ .

### 6.4.1 Критическая плотность

Есть еще более простая модель динамического развития Мира, чем модель Фридмана. Это модель Эйнштейна – де Ситтера, в которой Мир является плоским евклидовым, но масштаб расстояний, общий для всех точек пространства, зависит от времени:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - m^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Это решение может быть получено как предел решения Фридмана (6.15) при  $r_m \rightarrow \infty$ ,  $\varphi \rightarrow 0$ :

$$\frac{ct}{r_m} = \frac{\varphi^3}{12}; \quad \frac{r}{r_m} = \frac{\varphi^2}{4}.$$

Исключая параметр  $\varphi$ , получаем зависимость масштаба от времени

$$m \sim \frac{r}{r_m} = k (ct)^{(2/3)}; \quad \dot{m} = \frac{2}{3t}.$$

Теперь, наоборот, из уравнения (6.12) можно найти плотность пылевидной материи:

$$6 \left( \frac{\dot{m}}{m} \right)^2 = 6 \frac{4}{9t^2} = \frac{8\pi k}{c^2} \rho_0.$$

$$\rho_0 = \frac{c^2}{3\pi k t^2}; \quad \rho_0 m^3 = const. \quad (6.16)$$

Плотность, как и в задаче Фридмана, меняется обратно пропорционально  $m^3$ . Она однозначно определяется только временем  $t$ , прошедшим от Большого Взрыва.

Если же, как и в сферическом мире в качестве модели вещества для плоского мира взять ультрарелятивистский газ с уравнением состояния  $\epsilon = 3p$ , то уравнение динамики (6.12) упростится

$$m^2 \dot{m}^2 = a^2/4; \quad \dot{m}^2 = a t.$$

Масштаб может принимать как положительные, так и отрицательные значения, но время может быть только положительным! Мир развивается не вдоль оси времени, а вдоль полуоси.

Структура пространства в целом с точки зрения ОТО жестко определяется плотностью материи. Это порождает *парадокс лишнего протона*: лишний по сравнению с (6.16) протон на кубический метр превращает плоское пространство Эйнштейна – де Ситтера в замкнутый сферический мир Фридмана.

В то же время в ТГВ космологические решения, имея, в общем, тот же вид, что и в ОТО, не связаны плотностью вещества, так как в ОТО суммарная плотность энергии обязана быть равной нулю, а в ТГВ – это достаточно произвольная константа интегрирования, определяемая начальными данными.

## 6.5 Гравитационные волны

В 1918 году Эйнштейн пишет одну из самых значительных работ “О гравитационных волнах”. В этой работе он рассмотрел линеаризованные уравнения, с помощью которых описал слабые возмущения на фоне плоского пространства Минковского. В частности, он получил очень важную формулу потери энергии системой за счет гравитационного излучения.

Мы рассмотрим результаты этой работы более подробно в следующей главе.

## 6.6 ОТО в глобальном времени

Космологические решения ОТО всегда исходят из метрики в виде:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \gamma_{ij}(x, t) dx^i dx^j.$$

Здесь компонента метрики  $g^{00} = 1$  – время глобальное, – а  $g^{0i} = 0$  – система глобально инерциальная.

Прочие решения ОТО также могут быть приведены к глобальному времени. Если имеется четырехмерная метрика  $g_{\alpha\beta}$  в произвольных координатах  $x^\alpha$ , для приведения ее к глобальному време-

ни нужно преобразовать координаты (точнее – выбрать только новую временную координату  $\tau = ct$ ) так, чтобы выполнилось условие  $g^{00} = 1$ . По законам преобразования тензора

$$\bar{g}^{00} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \tau}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tau}{\partial x^\beta} = 1. \quad (6.17)$$

Но это дифференциальное уравнение на  $\tau$  оказывается уравнением Гамильтона – Якоби для траекторий движения свободно падающих материальных точек (лабораторий), общим собственным временем которых и является  $t$ . Таким образом, в глобальном времени реализуется физический *принцип эквивалентности*, привязывающий инерциальную систему к свободно падающей лаборатории, однако в отличие от лифта Эйнштейна, этих лабораторий множество и время в них синхронизировано. Тем самым принцип эквивалентности из локального превращается в глобальный.

### 6.6.1 Метрика Шварцшильда в глобальном времени

Прежде всего приведем к глобальному времени  $t$  метрику Шварцшильда (с временной переменной  $\tilde{t}$ ):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tilde{t}^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (6.18)$$

Уравнение Гамильтона - Якоби для выделения глобального времени записывается через компоненты обратной метрики:

$$\frac{1}{U} \left(\frac{\partial t}{\partial \tilde{t}}\right)^2 - U \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\left(\frac{\partial t}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial t}{\partial \varphi}\right)^2\right) = 1,$$

где

$$U = 1 - \frac{2M}{r}.$$

Квадрат момента количества движения

$$L^2 = \left(\frac{\partial t}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial t}{\partial \varphi}\right)^2$$

является сохраняющейся величиной на характеристиках этого уравнения  $L^2 = l^2 = const$ , так же как и

$$\epsilon = \frac{\partial t}{\partial \tilde{t}},$$

при этом, принимая на бесконечности  $t = \tilde{t}$ , получаем

$$\frac{1}{U} - U \left( \frac{\partial t}{\partial r} \right)^2 - \frac{l^2}{r^2} = 1.$$

Чтобы решение этого дифференциального уравнения покрывало все пространство – доходило до точки  $r = 0$ , константа  $l^2$  должна равняться нулю, то есть  $t$  не должно зависеть ни от  $\vartheta$ , ни от  $\varphi$ . Тогда

$$\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{\sqrt{1-U}}{U} = \frac{1}{U} \sqrt{\frac{2M}{r}} \equiv u; \quad d\tilde{t} = dt - u dr.$$

Подставляя это выражение в метрику Шварцшильда (6.18), получаем внешнюю метрику тяготеющей массы в глобальном времени

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r}} dt dr - dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (6.19)$$

Это выражение было получено из метрики Шварцшильда в 1921 году Пэнлеве [7].

Между этими двумя выражениями громадная разница: в (6.19)  $t$  – это *глобальное время*, в то время как в (6.18) переменная  $\tilde{t}$  – просто формальная переменная, наделенная физическим смыслом лишь в асимптотике при  $r \rightarrow \infty$ , но зато метрика диагональна. Эта разница проявляется в геометрии трехмерных сечений  $t = const$  (пространства). В (6.19) это плоское евклидово пространство, в то время как в (6.18) такие сечения имеют особенность на сфере  $r = r_g$ , внутри которой сечение становится псевдоевклидовым.

### 6.6.2 Метрика Шварцшильда в глобальной инерциальной системе

Интересно в метрике Шварцшильда перейти в глобальную инерциальную (синхронную) систему. Для этого нужно теперь провести

зависящее от времени преобразование пространственных координат  $\tilde{x}^j(x, t)$ , чтобы избавиться от недиагональной компоненты метрики  $g^{0i} \equiv V^i$ :

$$\tilde{g}^{0i} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial t} g^{00} + \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} g^{0j} = 0; \quad \frac{\partial x^j}{\partial t} |_{\tilde{x}^j = const} = -V^i.$$

Продемонстрируем этот процесс на примере метрики Шварцшильда - Пенлеве, где нужно провести преобразование радиуса с зависимостью от времени  $r(R, t)$ :

$$\frac{dr}{dt} = V^r = -\sqrt{2M/r}; \quad \sqrt{r} dr = -\sqrt{2M} dt;$$

$$r(R, t) = (R^{3/2} - \sqrt{(9/2)M} t)^{2/3},$$

что приводит к метрике в *синхронной системе отсчета* (модифицированная метрика Леметра – см. [3]):

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - \frac{R dR^2}{(R^{3/2} - \sqrt{(9/2)M} t)^{2/3}} - \\ &- (R^{3/2} - \sqrt{(9/2)M} t)^{4/3} (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) = \quad (6.20) \\ &= dt^2 - \frac{R}{r(R, t)} dR^2 - r^2(R, t)(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \end{aligned}$$

Время здесь то же, что и в стационарной метрике (6.19) – глобальное, – и сечение  $t = const$ , как и в метрике (6.19), в любой момент времени – плоское, что очевидно при  $t = 0$ , а в другие моменты времени требует проверки. Это, с другой стороны, очевидно: в метрике (6.20) сечение  $t = 0$  плоское, а с течением времени проводится только замена пространственных координат. Это и очень важно: *пространство* (трехмерное) остается самим собой (плоским евклидовым) с течением времени, несмотря на динамичность метрики.

### 6.6.3 Метрика Керра в глобальном времени

Уравнение Гамильтона – Якоби для метрики Керра (6.10) в координатах Бойера - Линдквиста записывается следующим образом [3]:

$$\frac{1}{\rho^2} \left( \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right) \left( \frac{\partial \tau}{\partial t} \right)^2 - \frac{\Delta}{\rho^2} \left( \frac{\partial \tau}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \right)^2 -$$

$$\frac{1}{\Delta \sin^2 \theta} \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) \left(\frac{\partial \tau}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{4Mar}{\rho^2 \Delta} \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = 1, \quad (6.21)$$

где  $\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr$ ;  $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ .

Так как коэффициенты уравнения не зависят от  $t$  и  $\varphi$ , то сопряженные им импульсы есть константы:

$$\tau = \epsilon t + l\varphi + f(\theta, r).$$

Из условия совпадения  $\tau$  с  $t$  на бесконечности нужно, чтобы  $\epsilon = 1$ . Слагаемое с квадратом  $l = \partial\tau/\partial\varphi$  содержит в знаменателе  $\sin^2 \theta$ , и для избежания соответствующей сингулярности нужно положить  $l = 0$ . Умножив при этой подстановке (6.21) на  $\rho^2$ , получим

$$\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta - \Delta \left(\frac{\partial \tau}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial \tau}{\partial \theta}\right)^2 - r^2 - a^2 + a^2 \sin^2 \theta = 0.$$

Сокращая слагаемые с  $\sin^2 \theta$ , получим уравнение с коэффициентами, не зависящими от  $\theta$ , что вместе с условием на бесконечности определяет независимость  $\tau$  от  $\theta$ , так что окончательно получаем

$$\tau = t \pm u(r); \quad u(r) = \frac{\sqrt{2Mr(r^2 + a^2)}}{\Delta}. \quad (6.22)$$

Подстановка  $dt = d\tau + u dr$  меняет компоненты метрики

$$\bar{g}^{00} = 1; \quad g^{0r} = V^r = \frac{\sqrt{2Mr(r^2 + a^2)}}{\rho^2}$$

и приводит пространственное сечение  $\tau = \text{const}$  к метрике

$$\begin{aligned} \gamma_{\theta\theta} &= \rho^2 & \gamma_{rr} &= \frac{\rho^2}{\Delta} + \frac{2Mr(r^2 + a^2)(2Mr - \rho^2)}{\rho^2 \Delta^2}; \\ \gamma_{r\varphi} &= \frac{\sqrt{2Mr(r^2 + a^2)}}{\rho^2} \frac{2Mar}{\Delta} \sin^2 \theta; \\ \gamma_{\varphi\varphi} &= \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mr}{\rho^2} a^2 \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (6.23)$$

с детерминантом всюду положительным

$$\det(\gamma_{ij}) = \rho^4 \sin^2 \theta. \quad (6.24)$$

Это говорит о том, что пространство всюду имеет локально евклидов тип, в то время как в координатах Бойера - Линдквиста при радиусах меньших гравитационного ( $\Delta = 0$ ) пространственное сечение  $t = \text{const}$  становится локально псевдоевклидовым.

Метрику (6.10) можно упрощать далее, проводя преобразования координат, не зависящие от времени. В частности, преобразованием угловой переменной  $\tilde{\varphi} = \varphi + f(r)$  пространственную часть метрики можно диагонализировать.

$$\gamma_{11} = \frac{(\rho^2)^2}{w}; \quad \gamma_{22} = \rho^2; \quad \gamma_{33} = \frac{w}{\rho^2} \sin^2 \vartheta; \quad (6.25)$$

$$w = (r^2 + a^2)\rho^2 + 2Mr a^2 \sin^2 \vartheta,$$

Эта метрика имеет сингулярность только при  $\rho^2 = 0$ .

При этом отличны от нуля угловая и радиальная составляющие поля абсолютной скорости

$$V^\varphi = -\frac{2aMr}{w}; \quad V^r = \frac{\sqrt{2Mr(r^2 + a^2)}}{\rho^2}, \quad (6.26)$$

## 6.7 Приведение к глобальному времени

В ОТО, по возможности, предпочитается четырехмерная диагональная метрика. Переход к диагональной четырехмерной метрике за счет преобразования времени может быть полезен и для решения задач ТГВ как чисто математический прием.

Приведем общие формулы приведения диагональной статической сферически симметричной метрики ОТО

$$ds^2 = a d\tilde{t}^2 - b dr^2 - R^2(r) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (6.27)$$

к глобальному времени заменой диагонального времени  $\tilde{t} = t + \Phi(r)$ :

$$\begin{aligned} ds^2 &= a(dt + f dr)^2 - b dr^2 = a dt^2 + 2a f dt dr - (b - a f^2) dr^2 = \\ &= (1 - g V^2) + 2g V - g dr^2. \end{aligned}$$

Здесь  $g$  — новый элемент  $\gamma_{rr}$ .

$$a = 1 - g V^2; \quad a f = g V; \quad g = b - a V^2.$$

Решая эту систему, находим:

$$g = ab; \quad V^2 = \frac{1-a}{ab}; \quad gV = \sqrt{ab(1-a)}.$$

Таким образом, метрика (6.27) приводится к следующему виду в глобальном времени:

$$ds^2 = a dt^2 + 2\sqrt{ab(1-a)} dt dr - ab dr^2 - R^2(r) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (6.28)$$

Так как в преобразованной метрике существует квадратный корень, подкоренное выражение должно быть положительным, и не каждая сферически симметричная метрика ОТО может быть переведена в глобальное время.

## 6.8 Техника АДМ

Одним из важнейших этапов в описании динамики пространства - времени в ОТО явилась серия работ Арновитта, Дезера и Мизнера 1959 года [6], где в явном виде выделена переменная времени и показано, что динамическими переменными в ОТО являются компоненты трехмерной метрики.

Они представили десять компонент четырехмерного метрического тензора через шесть компонент метрического тензора  $\gamma_{ij}$ , трехмерный вектор  $V^i$  (в обозначениях ТГВ) и функцию *хода времени*  $f(x, t)$ :

$$g_{00} = f^2 - \gamma_{ij} V^i V^j; \quad g_{0i} = \gamma_{ij} V^j; \quad g_{ij} = -\gamma_{ij}. \quad (6.29)$$

Компоненты обратного метрического тензора

$$g^{00} = \frac{1}{f^2}; \quad g^{0i} = \frac{V^i}{f^2}; \quad g^{ij} = \frac{V^i V^j}{f^2} - \gamma^{ij}. \quad (6.30)$$

Вариация действия Гильберта

$$\delta S = - \int \left( G_{00} \delta f + G_{0i} \delta V^i + \frac{1}{2} G^{ij} \delta \gamma_{ij} \right) \sqrt{\gamma} f d_3x dt. \quad (6.31)$$

Общей ковариантности соответствует равенство нулю вариации по всем полям: если вариацию по какому-либо полю оставить не равной нулю (нас интересует поле  $f$ ), то после общего преобразования координат это приведет к неравенству нулю всех вариаций.

В ТГВ компонента  $g^{00} = 1$  всегда и везде – это функция, определяющая ход глобального времени. Поэтому она не может варьироваться, и функция, которая умножается на эту вариацию, может быть произвольной. Это и есть плотность энергии (3.17).

Только компоненты пространственного метрического тензора  $\gamma_{ij}$  являются динамическими, имеющими сопряженные импульсы  $\pi^{ij}$ , а недиагональные элементы метрики  $g^{0i} \equiv V^i$  (в ТГВ – поле абсолютных скоростей) входят в производную по времени

$$\mu_{ij} = \frac{1}{2c}(\dot{\gamma}_{ij} + V_{i;j} + V_{j;i}), \quad (6.32)$$

АДМ-представление является мостиком от ОТО к ТГВ: достаточно положить  $f = 1$ ,  $\delta f = 0$ . Но в ОТО этому мешает общая ковариантность: после общего преобразования координат в новом АДМ-разбиении  $f$  опять окажется функцией координат и времени. Чтобы сохранить  $f = 1$ , нужно ограничиться преобразованиями координат, зависящих от времени, но не затрагивать преобразование времени. Однако следует подчеркнуть, что этот мостик формальный, на уровне уравнений. Физически ТГВ исходит из идеи пространства, как материального носителя геометрических свойств и глобального времени, как собственного времени пространства.

Таким образом, вариация всех десяти компонент, определяющих четырехмерную метрику в (6.31), приводит к основному отличию формул ОТО от формул ТГВ: вариация по  $f$  приводит к дополнительному по сравнению с девятью уравнениями ТГВ уравнению

$$H = 0. \quad (6.33)$$

Плотность полного гамильтониана – пространства и вещества полностью равна нулю, и поэтому сам гамильтониан равен нулю.

Решения ОТО, таким образом, определяют подмножество всех решений ТГВ с плотностью энергии всюду равной нулю.

## 6.9 ОТО и квантовая теория

Спасение возникшей в теории проблемы космологической сингулярности многие исследователи видят в квантовой теории: при малых масштабах нельзя не учитывать квантовые эффекты, которые могут предотвратить коллапс в нулевой масштаб, как в обычной квантовой механике атома водорода уравнение Шредингера приводит к волновым пакетам с нулевой плотностью вероятности нулевого расстояния электрона от ядра.

Однако квантовой теории гравитации очень не повезло по сравнению с другими полями. Исходным физическим уравнением для построения квантовой теории является уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = H\Psi. \quad (6.34)$$

Однако равенство нулю гамильтониана в ОТО не допускает описания квантовой динамики на основе уравнение Шредингера.

### 6.9.1 Уравнение Уилера – де Витта

Гамильтониан (3.17) квадратичен по импульсам и уравнение

$$H\Psi = 0$$

является некоторым уравнением в вариационных производных второго порядка на функционал, зависящий от метрики. Это уравнение – за неимением лучшего – и было провозглашено как *основное уравнение квантовой теории гравитации* под названием *уравнения Уилера – де Витта*

$$H\Psi = \left( \int \left( \frac{2\pi_j^i \pi_i^j - (\pi_i^i)^2}{\sqrt{\gamma}} - \frac{1}{2} R \sqrt{\gamma} \right) d_3x \right) \Psi = 0, \quad (6.35)$$

где  $\pi^{ij}$  определяет вариационную производную по трехмерному метрическому тензору

$$\pi^{kj} \Psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\delta \Psi}{\delta \gamma_{kj}}.$$

Это уравнение не описывает *квантовую динамику*,  $\Psi$  не является развивающимся во времени *вектором квантового состояния*, определяющим вероятности процессов. Но если уравнение написано, то с ним возможны определенные математические действия, которые и именуются *современной квантовой гравитацией*.

## Глава 6

# Приближения

Громадный множитель  $c^4/16\pi k$ , стоящий перед действием пространства, приводит к колоссальным энергиям, если пространство деформируется. Однако в малом любое риманово пространство является плоским и в малых масштабах (таких как Солнечная система) пространство приближенно можно полагать плоским. Это и есть главная отправная точка приближенного подхода в ТГВ.

### 7.1 Нерелятивистское приближение

В низшем приближении пространство плоское и динамика частиц определяется только полем абсолютных скоростей  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ . Если изучается движение нерелятивистской частицы, свободная частица (единичной массы) имеет лагранжиан

$$L = \frac{(\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{V}(\mathbf{r}))^2}{2}. \quad (7.1)$$

Импульс

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{V}(\mathbf{r})$$

определяет скорость

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p} + \mathbf{V}(\mathbf{r})$$

и далее – гамильтониан

$$H = \mathbf{p} \dot{\mathbf{r}} - L = \frac{\mathbf{p}^2}{2} + \mathbf{V} \mathbf{p} = \frac{(\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{V}(\mathbf{r}))^2}{2} + \dot{\mathbf{r}} \mathbf{V}(\mathbf{r}) - \mathbf{V}^2(\mathbf{r}) =$$

$$\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - \frac{\mathbf{V}^2(\mathbf{r})}{2} = \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + \phi(\mathbf{r}), \quad (7.2)$$

где обозначено

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{V}(\mathbf{r})^2}{2}, \quad (7.3)$$

так как  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  – заданная в пространстве функция.

Гамильтониан (7.2), выведенный для движения относительно абсолютного пространства, может быть представлен как гамильтониан системы с лагранжианом

$$L_c = \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - \phi(\mathbf{r}),$$

где  $\phi(\mathbf{r})$  заданный внешний (гравитационный) потенциал.

Далее мы покажем, что в низшем приближении этот потенциал находится из уравнения Пуассона

$$\Delta \phi = 4\pi k \rho. \quad (7.4)$$

Движение тела в гравитационном потенциале  $\phi(\mathbf{r})$  относительно нашей неинерциальной системы эквивалентно свободному движению в заданном поле скоростей в низшем приближении.

## 7.2 Приближение плоского пространства

Пока мы полагаем пространство плоским, единственной полевой переменной гравитации оказывается поле абсолютных скоростей пространства  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ . Распишем уравнения динамики в этом приближении: пространство евклидово, но присутствует поле абсолютных скоростей.

Поле скоростей входит только в кинетическую энергию пространства. Так как дальнейшие связи мы выводим только из кинетической энергии, то временно будем полагать стоящий перед ней множитель равным единице. Проекция линейных по полю скоростей уравнений

связи на само поле скоростей квадратично по скорости. Из-за того, что метрический тензор представляется единичной матрицей, все индексы мы можем писать снизу:

$$ll = V_i \frac{\partial T}{\partial V_i} = \frac{1}{4} (V_i \Delta V_i - V_i \partial_i \mu); \quad \mu = \partial_i V_i.$$

Из свертки динамических уравнений

$$sp = \delta_{ij} \frac{\delta T}{\delta \gamma_{ij}} \Big|_{\gamma_{ij} = \delta_{ij}} = -3T - 2\mu^2 - 2V_i \partial_i \mu$$

можно выразить  $V_i \partial_i \mu$ .

$$\Delta \left( \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) = \frac{1}{2} T + \frac{(\mathbf{rot} \mathbf{V})^2}{2} + \left( 4ll - \frac{sp}{2} \right). \quad (7.5)$$

В вакууме последняя скобка равна нулю.

### 7.3 Гравитационный потенциал

Вернемся к уравнению (7.5). В приближении ОТО и плоского пространства

$$T + \frac{8\pi k}{c^4} \varepsilon = 0; \quad T = -\frac{8\pi k}{c^4} \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  – плотность энергии всех прочих полей. Обозначая  $-V^2(\mathbf{r})/2 \equiv \phi(\mathbf{r})$  и полагая выполненными уравнения связи и динамики, из (7.5) получаем уравнение на потенциал:

$$\Delta \phi = 4\pi k \frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{(\mathbf{rot} \mathbf{V})^2}{2} \approx 4\pi k \rho - \frac{(\mathbf{rot} \mathbf{V})^2}{2}. \quad (7.6)$$

Вихревое поле скоростей дает отрицательную добавку к классическому уравнению Пуассона для гравитационного потенциала.

### 7.4 Слабые гравитационные волны

Однако на фоне плоского пространства возможно не только наличие поля скоростей, но и малых отклонений метрики от метрики

евклидова пространства, приводящее к волновым явлениям – гравитационным волнам.

Классической работой по описанию гравитационных волн является работа Эйнштейна 1918 года, в которой он, естественно, пользовался уравнениями общей теории относительности, которые, однако, являются и приближением от ТГВ. Наиболее интересным моментом этой работы является вычисление потерь энергии динамической системы за счет гравитационного излучения.

Так как пространство на громадных масштабах в высшей степени является плоским, то вполне оправданным является метод возмущений – рассмотрение малых отклонений  $h_{ij}$  от метрики плоского пространства  $\bar{\gamma}_{ij}$ :

$$\gamma_{ij} = \bar{\gamma}_{ij} + h_{ij}.$$

Описание будем вести в глобальной инерциальной системе –  $V^i = 0$ .

В отличие от работы Эйнштейна мы будем записывать все соотношения в ковариантных производных, тем самым избегая проблему зависимости соотношений от выбора координат, существенную в работе Эйнштейна.

Подъем и опускание индексов, ковариантные производные определяются метрикой плоского пространства, так как учет добавок от полного метрического тензора (первого порядка малости) в уравнениях на добавки к метрике (тоже первый порядок) приводит к величинам второго порядка малости, отбрасываемых в линеаризованных уравнениях.

Так как тензор кривизны плоского пространства равен нулю, то ковариантные производные перестановочны – можно не заботиться о порядке операторов дифференцирования.

Уравнения связей

$$\pi^{ij} = \frac{1}{4}(\dot{h}^{ij} - \gamma^{ij}\dot{h}); \quad \nabla_j \pi_i^j = \partial_t(\nabla_j h_i^j - h_{,i}) = 0,$$

где  $h = \gamma^{ij}h_{ij} = h_i^i$  – шпур тензора возмущений.

$$h_{i;j}^j = h_{,i}.$$

Поэтому  $\nabla_j h_i^j = h_{,i}$ .

Тензор Римана – Кристоффеля в линейном приближении:

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}(h_{il;jk} + h_{jk;il} - h_{ik;jl} - h_{jl;ik}).$$

Тензор Риччи

$$R_{ik} = \frac{\gamma^{jl}}{2}(h_{il;jk} + h_{jk;il} - h_{ik;jl} - h_{jl;ik}) = \frac{1}{2}(h_{;ik} - \Delta h_{ik}).$$

Скалярная кривизна

$$R = \gamma^{ik} = R_{ik} = \frac{1}{2}(\Delta h - \Delta h) = 0.$$

В линейном приближении скалярная кривизна пространства равна нулю вследствие уравнений связей. Этот вывод важен не только для гравитационных волн, но и для понимания проблемы *плоскостности* нашего мира.

В уравнениях динамики импульсы можно представить через

$$\chi_j^i = h_j^i - \delta_j^i h; \quad \pi_j^i = \dot{\chi}_j^i.$$

Линеаризованные уравнения

$$\ddot{\chi}_j^i - \Delta \chi_j^i - \delta_j^i \Delta h + \gamma^{ik} h_{,ik} = 0. \quad (7.7)$$

Эти уравнения имеют волновой характер, однако различные компоненты здесь взаимно завязаны. Возьмем шпур этой системы уравнений и учтем, что  $\chi \equiv \chi_i^i = -2h$ :

$$\ddot{\chi} - \Delta \chi^i_i - 3\Delta h + \Delta h = -2\ddot{h} = 0. \quad (7.8)$$

Мы видим, что шпур  $\chi$  имеет совершенно не волновую динамику – это уравнение как раз обеспечивает возможность хэббловского расширения мира. Поэтому в переменных  $\chi_j^i$ , удовлетворяющих уравнениям связи  $\chi_{j;i}^i = 0$ , нужно отделить шпур и выделить бесшпуровую часть, для которой динамические уравнения являются разделенными волновыми уравнениями

$$\ddot{\chi}_j^i - \Delta \chi_j^i = 0; \quad \chi_{j;i}^i = 0; \quad \chi_i^i = 0. \quad (7.9)$$

Интересно рассмотреть *чисто конформную* малую деформацию плоского пространства. Выделим из  $h_j^i$  шпур

$$h_j^i = \zeta_j^i + \delta_j^i \frac{h}{3}; \quad \zeta_i^i = 0.$$

Чисто конформная деформация – равенство нулю  $\zeta_j^i$ . Условия связей

$$\nabla_i (h_j^i - \gamma_j^i h) = \nabla_i (\zeta_j^i - \frac{2}{3} \delta_j^i h) = 0$$

при  $\zeta_j^i = 0$  ( чисто конформная деформация) приводят к  $h_{,j} = 0$  – одинаковости масштаба во всем пространстве. Конформная динамика возможна только как единая для всего пространства в целом. Зависимость конформного фактора от координат (неоднородность) приводит к появлению других компонент тензора  $h_{ij}$ .

Бесшпуровые компоненты ( $h = 0$ ;  $h_j^i = \zeta_j^i$ ) удовлетворяют волновым уравнениям

$$\square h_{ij} = -\frac{16\pi k}{c^4} T_{ij}, \quad (7.10)$$

где из  $T_{ij}$  также вырезается бесшпуровая часть.

Таким образом, гравитационные волны *распространяются со скоростью света*.

## 7.5 Излучение гравитационных волн

При гамильтоновом или лагранжевом описании линеаризованной задачи лагранжиан нужно представить до второго порядка малости по возмущениям метрики. Динамическую часть метрики составляют возмущения, а кинетическая энергия квадратична по скоростям, таким образом, в кинетической энергии метрику, с помощью которой производится свертка, нужно взять для фонового пространства

### 7.5.1 Плоская волна

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси  $x$  в вакууме – все функции зависят только от  $x$  и  $t$  и источники отсутствуют. Уравнение связи связывает только компоненты  $h_i^1$ :

$$\partial_x h_i^1 = 0; \quad h_i^1 = const = 0,$$

так как мы описываем переменные поля. Поля с нижними индексами симметричны

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{12} & h_{22} & h_{23} \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & -\alpha \end{pmatrix},$$

где еще учтено равенство нулю шпура  $h_i^i = 0$ .

Функции  $h_j^i$  подчиняются уравнению Лапласа, что в одномерном случае приводит к решению в виде:

$$\alpha = \alpha_1(x - ct) + \alpha_2(x + ct); \quad \beta = \beta_1(x - ct) + \beta_2(x + ct).$$

Первые слагаемые определяют волну, бегущую со скоростью света направо, а вторые – налево. Так как индексы 2 и 3 указывают на направления, *поперечные* направлению распространения волны, и так как их два, то гравитационные волны оказываются *поперечно - поперечными*.

Вследствие линейности уравнений и следующего отсюда принципа суперпозиции каждое слагаемое можно рассматривать независимо.

### 7.5.2 Излучение гравитационных волн

Здесь мы следуем работе Эйнштейна [14]. В линейном приближении вычисления в ТГВ и ОТО практически одинаковы.

Линейное дифференциальное уравнение (7.10) точно решается в запаздывающих потенциалах. Будем рассматривать систему, в которой происходят какие-то движения со скоростями, много меньшими скорости света, и изучим гравитационное поле (возмущения метрики) на расстоянии, много большем размеров этой системы. Тогда решение в запаздывающих потенциалах можно упростить:

$$h_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi R} \int T_{\alpha\beta} d_3x' |_{t'=t-\frac{R}{c}}; \quad R = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|. \quad (7.11)$$

Вследствие условия поперечности в любом направлении излучаются волны, имеющие два пространственных индекса.

Из тождества Гильберта для тензора энергии - импульса:

$$x^i(\partial_0 T^{00} + \partial_k T^{k0}) = 0 = \partial_0(x^i T^{00}) + \partial_k(T^{k0} x^i) - T^{i0},$$

откуда

$$T^{i0} = \partial_0(x^i T^{00}) + \partial_k(T^{k0} x^i).$$

Далее

$$x^i(\partial_0 T^{0j} + \partial_k T^{kj}) = 0 = \partial_0(x^i T^{0j}) + \partial_k(T^{kj} x^i) - T^{ij},$$

откуда

$$T^{ij} = \partial_0(x^i T^{0j}) + \partial_k(T^{kj} x^i) = \partial_0^2(x^i x^j T^{00}) + \partial_k(T^{kj} x^i).$$

Члены с частными пространственными производными при интегрировании переходят в поверхностные интегралы, которые, если граница достаточно удалена от излучающей системы, обращаются в нуль и в формуле (7.11) остается часть с пространственными индексами, в правой части которой стоит интеграл

$$T^{ij} = \frac{d^2}{dt^2} \int x^i x^j \rho dV.$$

Так как  $h_\mu^\mu = 0$ , то и в правой части должен стоять бесшпуровый тензор – *тензор квадрупольного момента*

$$\mathcal{D}^{ij} = \int (3x^i x^j - r^2 \delta^{ij}) dm.$$

Окончательно,

$$h_{ij}(\mathbf{r}, t) = \frac{2k}{3Rc^4} \ddot{\mathcal{D}}_{ij} |_{t' = t - \frac{R}{c}}. \quad (7.12)$$

### 7.5.3 Потеря энергии за счет гравитационного излучения

В пространстве Минковского имеется вектор Киллинга сдвига по времени  $\xi_\alpha$  с компонентами  $(1, 0, 0, 0)$  и энергия некоторой замкнутой динамической системы (например, вращающейся двухкомпонентной звездной системы) сохраняется:

$$\nabla_\alpha(T^{\alpha\beta}\xi_\beta) = 0.$$

При возмущении метрики  $\xi$  перестает быть вектором Киллинга:

$$\nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i = -2\Gamma_{ij}^0,$$

что нарушает закон сохранения энергии:

$$\nabla_\alpha (T^{\alpha\beta} \xi_\beta) = T^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^0. \quad (7.13)$$

Из уравнения

$$\square h_{ij}^{(s)} = -\frac{16\pi k}{c^4} \Pi_{ij}^{(s)kl} T_{kl}, \quad s = 1, 2. \quad (7.14)$$

Здесь  $T_{kl}$  – тензор энергии - импульса излучающей системы; индекс  $s$  принимает значения 1 или 2 – одно из двух поперечно - поперечных поляризаций. Если волна распространяется вдоль оси  $x$ , то отличны от нуля компоненты  $h_{\alpha\beta}$ , пропорциональные единичным компонентам двух поперечно - поперечных поляризаций:

$$e_{22}^{(1)} = -e_{33}^{(1)} = 1; \quad e_{23}^{(2)} = e_{32}^{(2)} = 1,$$

а все другие компоненты равны нулю.

$$\Pi_{ij}^{(s)kl} = \frac{1}{2} e_{ij}^{(s)} e^{(s)kl}$$

– проекционный оператор в данную поляризацию. Он удовлетворяет условию ортонормированности:

$$\Pi_{ij}^{(s)kl} \Pi_{kl}^{(t)mn} = \delta^{(st)} \Pi_{ij}^{(s)mn}.$$

Для смешанного, неполяризованного излучения также введем проекционный оператор:

$$\Pi_{ij}^{kl} = \Pi_{ij}^{(1)kl} + \Pi_{ij}^{(2)kl},$$

так что отличны от нуля только компоненты  $h_{22} = -h_{33}$  и  $h_{23}$

$$\delta\Gamma_{ij}^0 = -\frac{1}{2} \dot{h}_{ij},$$

и интегрирование по области  $\mathcal{B}$ , если на ее границе  $\delta\mathcal{B}$  тензор энергии - импульса материи обращается в нуль, (7.13) то

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= - \int_{\mathcal{B}} T^{kl} \delta\Gamma_{kl}^0 d_3x = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} T^{kl} \dot{h}_{kl} d_3x = -\frac{c^4}{32\pi k} \int_{\mathcal{B}} \square h^{kl} \Pi_{kl}^{ij} \dot{h}_{ij} d_3x = \\ &= -\frac{c^2}{64\pi k} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \dot{h}_{kl} \Pi^{kl ij} \dot{h}_{ij} d_3x + \frac{c^4}{64\pi k} \int_{\mathcal{B}} \Delta h_{kl} \Pi^{kl ij} \dot{h}_{ij} d_3x. \end{aligned}$$

Интегрируя последний член по частям, получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \mathcal{E} + \frac{c^4}{64\pi k} \int_{\mathcal{B}} \Pi^{kl ij} \left( \frac{1}{c^2} \dot{h}_{kl} \dot{h}_{ij} + \partial_m h_{kl} \partial_m h_{ij} \right) d_3x \right) = \\ \frac{c^4}{32\pi k} \oint_{\delta\mathcal{B}} \Pi^{kl ij} \dot{h}_{kl} \partial_n h_{ij} dS_n. \end{aligned}$$

Здесь в интеграле по объему содержится плотность энергии гравитационных возмущений, а поверхностный интеграл содержит плотность потока гравитационной энергии.

Вдали от излучающей системы на размерах, много меньших расстояния до нее, волны становятся практически плоскими, распространяющимися по радиусу, и следовательно,

$$\partial_n h_{kl} = -\dot{h}_{kl}/c,$$

и компоненты  $h_{ij}$  выражаются через (7.14).

Если энергия гравитационного излучения мала по сравнению с энергией излучающей системы, то потеря энергии этой системой выражается через интеграл:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{c^4}{32\pi k} \frac{\ddot{D}_{kl} \ddot{D}_{ij}}{cR^2} \left( \frac{2k}{3c^4} \right)^2 4\pi R^2 \langle \Pi^{ij,kl} \rangle,$$

где последний множитель есть усредненный по всем направлениям проекционный оператор. Вследствие изотропности фонового пространства Минковского он может выражаться только через единичный (и метрический) тензор  $\delta_{ij}$  с неопределенными коэффициентами  $a$  и  $b$ :

$$\langle \Pi^{ij,kl} \rangle = a (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk}) + b \delta^{ij} \delta^{kl}.$$

Используя рассмотренные выше свойства проекционного оператора, можно определить  $a$  и  $b$ :

$$\langle \Pi^{ii,kl} \rangle = 0 = (2a + 3b) \delta^{kl}; \quad b = -\frac{2}{3}a;$$

$$\langle \Pi^{ij,ij} \rangle = 2 = a((3 \cdot 3 + 3) - \frac{2}{3}3) = 10a; \quad a = \frac{1}{5}.$$

Отсюда

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{k}{45c^5} (\ddot{D}_{ij})^2. \quad (7.15)$$

Эта формула была выведена Эйнштейном в 1918 году [14]. Если излучающая система совершает почти периодическое движение с частотой  $\omega$ , то эта формула переходит в

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{k\omega^6}{45c^5}(\mathcal{D}_{ij})^2.$$

За счет малости гравитационной постоянной и  $c^5$  в знаменателе при каких-либо земных экспериментах потери энергии за счет гравитационного излучения ничтожно малы.

Однако, в астрофизических масштабах этот слабый эффект наблюдаем.

В 1993 году Нобелевская премия по физике была присуждена Дж. Тейлору и Р. Халсу, более четверти века наблюдавшими за двойными пульсарами и доказавшими, что потеря энергии происходит в соответствии с формулой Эйнштейна – пропорционально  $\omega^6$ .

#### 7.5.4 Излучение по Эйнштейну и ТГВ

Вернемся к работе Эйнштейна 1918 года. Используя бесконечно малые преобразования координат, Эйнштейн обратил в нуль компоненты  $h_{00}$  и  $h_{0i}$ , то есть по терминологии ТГВ перешел в глобальную инерциальную систему, и дальнейшие его вычисления могут быть записаны в виде вышеприведенных формул. Так как плотность гамильтониана квадратична по возмущениям, то десятое уравнение  $H = 0$  в работе Эйнштейна в линейном приближении выполнялось автоматически – в линейном приближении он работал только с девятью уравнениями – уравнениями ТГВ.

## Глава 7

# Квантовая теория

Квантовая теория гравитации, как и квантовая теория других полей, например, квантовая электродинамика, строится на основе уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi, \quad (8.1)$$

определяющего динамику *вектора состояния* пространства (и других полей)  $\Psi$  в глобальном времени.

### 8.1 Плотность энергии

Плотность полного гамильтониана с учетом материи отлична от нуля:

$$H = \frac{2}{\sqrt{\gamma}} (\gamma_{ik} \gamma_{jl} - \frac{1}{2} \gamma_{ij} \gamma_{kl}) \pi^{kl} \pi^{ij} + \sqrt{\gamma} \left( -\frac{1}{2} R^{(3)} + T_0^0 + V^i T_i^0 \right) - \pi^{ij} (V_{i;j} + V_{j;i}). \quad (8.2)$$

Если вместо канонической пары  $(\gamma_{ij}, \pi^{kl})$  ввести *почти каноническую* пару  $(\gamma_{ij}, \pi_l^k)$ , где

$$\pi_l^k = \gamma_{lm} \pi^{km}, \quad (8.3)$$

которые назовем *аффинными импульсами*, а из них выделим еще шпур  $\pi_i^l$ , который коммутирует (в смысле скобок Пуассона) с каждым аффинным импульсом:

$$\pi_j^i = q_j^i + \frac{\delta_j^i}{3}\pi; \quad q_i^i = 0; \quad \pi_i^i = \pi, \quad (8.4)$$

то в этих переменных (и при  $V^i = 0$ ) гамильтониан (8.2) выглядит проще:

$$H = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left( 2q_j^i q_i^j - \frac{\pi^2}{3} \right) - \frac{\sqrt{\gamma}}{2} R^{(3)}, \quad (8.5)$$

причем метрика входит в кинетическую энергию только через  $\sqrt{\gamma}$ , а эта переменная коммутирует с  $q_j^i$ , которые, однако, друг с другом не коммутируют:

$$\{q_j^i(x), q_l^k(x')\} = \frac{1}{2}(\delta_l^i q_j^k - \delta_j^k q_l^i)\delta(x - x'). \quad (8.6)$$

Это – коммутационные соотношения токов группы  $Sl(3)$ , которые таким образом естественно возникают в динамической теории гравитации. Некоммутативность аффинных импульсов говорит о том, что функциональное пространство трехмерных метрик является искривленным (см. [15]).

## 8.2 Квантовая модель Большого Взрыва

Космологические проблемы на серьезную научную основу встали после создания ОТО, особенно после работ А.А. Фридмана по динамике изотропного мира. Космологические задачи ОТО изначально формулируются в глобальном времени и в значительной мере просто переносятся в ТГВ. Однако допустимость ненулевого значения энергии в ТГВ значительно приближает космологические задачи ТГВ к задачам обычной динамической теории поля и расширяет круг решений. Кроме того, ненулевой гамильтониан позволяет обычным образом – через уравнение Шредингера – формулировать квантовые задачи.

Один из наиболее простых примеров классического и квантового описания модели Большого Взрыва в ТГВ мы продемонстрируем ниже.

### 8.2.1 Сферическое пространство

Рассмотрим компактную космологическую модель фридмановского типа, однородную и изотропную с пространством в виде трехмерной сферы, учитывающую из геометрии пространства только изменение радиуса  $r$ , однако, в отличие от вакуумной задачи предыдущего раздела, заполненного веществом. Наибольший интерес представляет область малых радиусов – Большого Взрыва с предельно сильно сжатым веществом, представляющим из себя ультрарелятивистский газ с уравнением состояния  $\varepsilon = 3p$ .

Лагранжиан изоэнтропного газа представляется интегралом от давления, выражаемого функцией от химического потенциала  $\mu$ , в свою очередь представляемого через

$$\mu = \sqrt{(\dot{\sigma} + V^i \partial_i \sigma)^2 - \gamma^{ij} \partial_i \sigma \partial_j \sigma}.$$

В однородном случае  $\mu = \dot{\sigma}$  и лагранжиан в единице неизменяющегося (координатного) объема пропорционален физическому объему, учитывающему  $\sqrt{\gamma}$ :

$$L = p(\dot{\sigma}) 2\pi^2 r^3. \quad (8.7)$$

Вариация действия по  $\sigma$  приводит к закону сохранения материи

$$\frac{d}{dt}(\rho r^3) = 0; \quad \rho = \frac{dp}{d\mu}. \quad (8.8)$$

Для ультрарелятивистской материи давление пропорционально  $\mu^4$ , что с учетом лагранжиана гравитации для этой модели приводит к полному модельному лагранжиану:

$$L = -\frac{r(\dot{r}^2 - 1)}{2} + \rho_0 \frac{\dot{\sigma}^4}{4} r^3. \quad (8.9)$$

Импульс, канонически сопряженный  $\sigma$ , (количество материи в единице координатного объема) постоянен

$$p_r = -r \dot{r}; \quad p_\sigma = M_r = \rho_0 \dot{\sigma}^3 r^3.$$

Выражая, как обычно, скорости через импульсы

$$\dot{r} = -\frac{p_r}{r}; \quad \dot{\sigma} = \frac{1}{r} \left( \frac{p_\sigma}{\rho_0} \right)^{1/3},$$

переходим к гамильтониану

$$H = -\dot{r} p_r + \dot{\sigma} p_\sigma - L = -\frac{p_r^2 + r^2}{2r} + \frac{q^2}{2r}, \quad (8.10)$$

где  $q^2$  характеризует сохраняющееся количество ультрарелятивистской материи.

Классическое уравнение динамики можно построить из закона сохранения энергии:

$$\dot{r} = \frac{1}{r} \sqrt{q^2 - 2Er - r^2}. \quad (8.11)$$

Это уравнение описывает изменение радиуса между максимальным и минимальным значениями, определяемого корнями подкоренного выражения.

$$r_{max} = \sqrt{e^2 + q^2} - e. \quad (8.12)$$

Второй корень отрицательный, поэтому в классике радиус принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Если  $q^2 \neq 0$ , энергия может быть как положительной, так и отрицательной. При  $q^2 = 0$  – чисто фридмановская динамика (без ультрарелятивистской материи) – энергия может принимать только отрицательные значения.

В данном разделе мы лишь продемонстрируем эффективность шредингера подхода в квантовой теории гравитации на основе ТГВ. Поэтому здесь мы работаем в планковской системе единиц.

### 8.2.2 Квантовая модель

Волновая функция является функцией радиуса сферы  $r$ . Обозначая штрихом производную по радиусу, получаем космологическое волновое уравнение (симметризуя  $p^2/r$ ):

$$\begin{aligned} -\left(\frac{u'}{r}\right)' + \left(-r + \frac{q^2}{r}\right)u &= 2Eu, \\ u'' - \frac{u'}{r} + (-r^2 + q^2)u &= 2rEu. \end{aligned} \quad (8.13)$$

У этого уравнения регулярная особая точка  $r = 0$  и иррегулярная  $r = \infty$ , в окрестности которой функция ведет себя как волновая функция осциллятора

$$A e^{-r^2/2} + B e^{r^2/2}.$$

При определенных значениях  $E$  коэффициент  $B$  обращается в нуль – это и есть нормируемые решения квантового уравнения. Функция равна нулю в нуле и на бесконечности, значит в конечной области она может иметь  $n$  экстремумов. В уравнении (8.13) два параметра:  $q$  и  $e$ .

При  $q^2 = 1$  вид решений для  $n = 1, 8$  приведен на графиках.

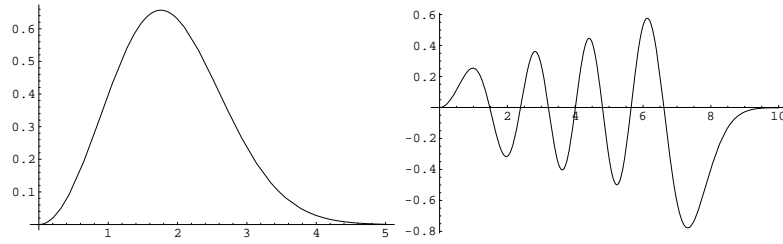


Рис. 1

В окрестности нулевого масштаба все решения квадратичны. Это значит, что *плотность вероятности состояния с  $r = 0$  в любом квантовом состоянии равна нулю*.

В таблице приведены значения энергии при  $q^2 = 0, 1, 10$  для малых  $n$

Собственные значения энергии

$n$	$q^2 = 0$	$q^2 = 1$	$q^2 = 10$
1	-1.3133	-1.0202	2.6765
2	-1.9243	-1.7122	0.564
3	-2.3863	-2.2107	-0.441
4	-2.773	-2.6193	-1.1208
...	...	...	...
8	-3.9599	-3.8487	-2.8153

Хотя все функции изменяются по масштабу  $r$  от нуля до бесконечности, каждая собственная функция имеет две характерные области: область колебательного изменения, где сосредоточена основная часть интеграла от квадрата функции (основная часть вероятности), и область экспоненциального спада, где величина функции быстро стремится к нулю. Переход из одной области в другую, как это видно из уравнения, происходит при  $r_{max}$  (8.12), то есть с ростом  $n$  первая область растет. В первой области интенсивность последующих пиков по сравнению с первыми возрастает.

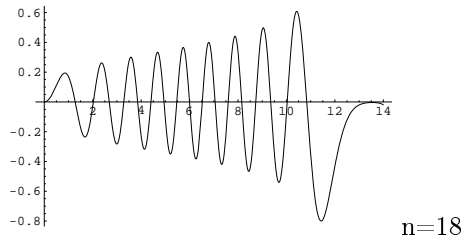


Рис. 2

Таким образом, вклад в динамику при малых радиусах в основном дают функции с малым  $n$ . На больших радиусах основной вклад в квантовую динамику дают функции с большим  $n$ .

Собственные значения энергии могут равняться и нулю, однако это возможно только при определенных количествах ультрарелятивистской материи, и каждому такому значению соответствует только одна функция с  $n$  экстремумами:  $q^2 = 4n$ .

Конечно, рассмотренная квантовая задача не описывает *реальный* Мир при малых масштабах, она, скорее, демонстрирует специфику квантовой модели Мира. Наиболее существенной такой особенностью является различие квантового и классического решений: уравнение классической динамики (8.11) имеет своим решением изменение радиуса  $r$  от *отрицательного* радиуса  $r_{min}$  до положительного  $r_{max}$ , а точка  $r = 0$  ничем не отличается от других точек в указанном интервале. В квантовом случае точка  $r = 0$  является особой точкой дифференциального уравнения Шредингера, поэтому плотность вероятности нахождения Мира в этом состоянии равна нулю.

### Квантовая модель плоского Мира

Рассмотрим ещё некомпактную квантовую космологическую модель, однородную и изотропную с плоским пространством, учитывающую от гравитации только изменение масштаба. Как и в предыдущей задаче, заполним пространство ультрарелятивистским газом с уравнением состояния  $\varepsilon = 3p$ .

$$dl^2 = m(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2); \quad \sqrt{\gamma} = m^3.$$

Гамильтониан аналогичен гамильтониану предыдущей задачи, только отсутствует потенциальная энергия пространства:

$$H = -\frac{p_m^2}{2m} + \frac{1}{a^2 m}, \quad (8.14)$$

где  $a$  – некоторый масштаб, определяемый плотностью материи, к которому мы и будем относить все масштабы, т. е. далее  $a = 1$ .

Волновая функция является функцией масштаба  $m$ . Обозначая штрихом производную по  $m$ , получаем космологическое волновое уравнение:

$$\begin{aligned} \left(\frac{u'}{2m}\right)' + \frac{1}{m}u &= Eu, \\ u'' - \frac{u'}{m} + 2u &= 2mEu. \end{aligned} \quad (8.15)$$

У этого уравнения регулярная особая точка  $m = 0$  и иррегулярная  $m = \infty$ , в окрестности которой функция ведет себя как

$$A e^{-kEm\sqrt{Em}} + B e^{kEm\sqrt{Em}}.$$

Характер уравнения (8.15) такой же, как у уравнения Шредингера для атома водорода (с противоположным знаком энергии): при отрицательных значениях энергии имеется сплошной спектр, а при положительных – дискретный.

При определенных положительных значениях  $E$  коэффициент  $B$  обращается в нуль – это и есть нормируемые решения квантового уравнения. Спектр энергий таких решений

$$E_n = \frac{3}{10n}, \quad (8.16)$$

где  $n$  определяет число экстремумов волновой функции.  
Вид решений при  $n = 1, 4$  приведен на графиках.

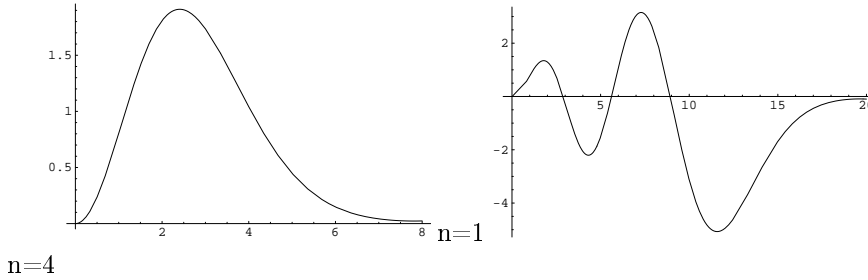


Рис. 3

Как и в предыдущей задаче, в окрестности нулевого масштаба все решения квадратичны. Это значит, что *плотность вероятности состояния с  $m = 0$  в любом квантовом состоянии равна нулю*.

Хотя все функции изменяются по масштабу  $t$  от нуля до бесконечности, каждая собственная функция имеет две характерные области: область колебательного изменения, где сосредоточена основная часть интеграла от квадрата функции (основная часть вероятности), и область экспоненциального спада, где величина функции быстро стремится к нулю. Переход из одной области в другую, как это видно из уравнения, происходит при изменении знака  $Et - 1$ , то есть с ростом  $n$  первая область растет линейно — приблизительно как  $3.3n$ . В первой области интенсивность последующих пиков по сравнению с первыми возрастает:

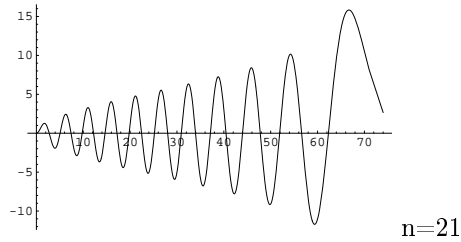


Рис. 4

Ещё более резко возрастают площади последующих пиков в квадрате функции, определяющие плотность вероятности:

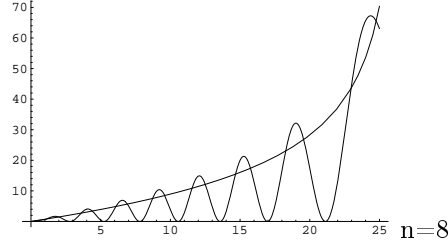


Рис. 5

Здесь ещё показан ход плотности вероятности классической динамики, пропорциональный

$$1/\dot{m} = \frac{m}{\sqrt{1 - Em}}.$$

Таким образом, вклад в динамику при малых масштабах в основном дают функции с малым  $n$ . При этом именно функции с малым  $n$  меняются наиболее быстро. На больших масштабах основной вклад в квантовую динамику дают функции с большим  $n$  и малым значением энергии, поэтому динамические изменения происходят медленно.

Характерным результатом квантовой модели является ограничение максимального значения энергии:  $E_{max} = E_1 = 0.3$ .

### 8.3 Плоская анизотропная модель

Изучим теперь квантовый вариант рассмотренной выше однородной модели с гамильтонианом (4.39). Вследствие коммутации оператора  $B$  с гамильтонианом происходит разделение переменных: волновая функция может быть представлена как произведение

$$\psi = e^{-\frac{i}{\hbar} Et} W(r) U(\mu, \nu, \vartheta, \varphi, \psi).$$

Задача распадается на два уравнения в частных производных. Для функции  $W(r)$  нужно учесть меру в пространстве компонент метрики:

$$d_6\gamma = d\Omega(\mu, \nu, \vartheta, \varphi, \psi) r^5 dr,$$

что приводит к уравнению

$$\frac{1}{r^5} \frac{d(r^5 W'(r))}{dr} + \frac{l^2}{r^2} W(r) = E W(r) \quad (8.17)$$

и для функции  $U(\mu, \nu, \vartheta, \varphi, \psi)$ :

$$\frac{1}{2} \left( 3p_\mu^2 + p_\nu^2 + \frac{p_3^2}{\text{sh}^2(2\nu)} + \frac{p_1^2}{\text{sh}^2(\mu + \nu)} + \frac{p_2^2}{\text{sh}^2(\mu - \nu)} \right) U = \left( \frac{4l}{3} \right)^2 U. \quad (8.18)$$

В гамильтониан не входит переменная  $\psi$ , следовательно, и  $p_\psi$  является интегралом движения. Так как оператор  $P^2$  (4.37) коммутирует с гамильтонианом, решения уравнения (8.18) строятся из функций Якоби [9], определяемых с помощью дифференциального оператора

$$\hat{L}^2(m, k) = \frac{d^2}{dx^2} + \text{ctg}x \frac{d}{dx} - \left( \frac{m - k \cos x}{\sin x} \right)^2. \quad (8.19)$$

Здесь мы рассмотрим только первое уравнение, имеющее характер уравнения Бесселя с регулярной особой точкой в нуле и иррегулярной на бесконечности.

В нуле функция ведет себя как  $r^\beta$ :  $\beta = -2 + \sqrt{4 - l^2}$ . Здесь видна физическая граница между анизотропией, определяемой величиной  $l^2$ , слабой ( $l^2 < 4$ ) и сильной ( $l^2 > 4$ ). Плотность вероятности в окрестности нуля ведет себя как

$$dp = \rho dr = W^2 r^5 dr \sim r^{1 + \sqrt{4 - l^2}}.$$

При сильной анизотропии поведение регулярно, при слабой происходит коллапс.

На бесконечности характер решения зависит от знака энергии:

$$W \sim r^{-5/2} e^{\sqrt{E}r}.$$

При  $E < 0$  решения имеют сплошной спектр, осциллируют. При положительных энергиях, как и в предыдущей задаче, спектр дискретен – отбираются только затухающие решения.

## 8.4 Квантовая теория гравитации

В предыдущих задачах рассматривались системы с конечным числом степеней свободы. Переходя теперь к полевым задачам, сразу предупредим, что квантовая теория гравитации здесь не будет изложена. Мы отметим лишь специфику квантовой теории гравитации по сравнению с достаточно хорошо разработанной квантовой электродинамикой.

- Физический смысл координат определен лишь после определения метрики, которая является квантовым объектом.
- Глобальная нелинейность классической теории при линейности относительно малых вариаций метрики.
- Кривизна функционального пространства метрик.
- Некоммутативность калибровочных преобразований.

### 8.4.1 Функциональное пространство метрик

Несмотря на то, что гамильтониан гравитации отличен от нуля, гамильтонова, а затем и квантовая теории гравитации оказываются нетривиальными, так как пространство метрик является искривленным. Это искривление определяется двумя составляющими: локальной кривизной пространства метрик в точке и некоммутативностью калибровочных преобразований – преобразований координат.

При вычислении кинетической энергии в однородной анизотропной космологической модели (4.28) мы увидели инвариантность меры относительно группы  $Sl_3$ . Каждая компонента метрики не просто изменяется на произвольную величину, а вклад этого сдвига в кинетическую энергию определяется всеми другими компонентами метрики нелинейным образом, так что различные метрики получаются не сдвигом их компонент, а преобразованием группой  $Sl_3$ . Само множество метрик в одной точке – это не плоское многообразие, а многообразие, инвариантное относительно действия этой группы – искривленное пространство.

Пространство двумерных метрик инвариантно относительно группы  $Sl_2$ . Например, при изучении плоской гравитационной волны мы

ввели расстояние в пространстве метрик – между бесконечно близкими метриками с заданным детерминантом  $r^2$  так:

$$dl^2 = r ((\operatorname{ch}\chi + \operatorname{sh}\chi \cos \eta)dy^2 + 2 \operatorname{sh}\chi \sin \eta dy dz + (\operatorname{ch}\chi - \operatorname{sh}\chi \cos \eta)dz^2). \quad (8.20)$$

Это метрика двумерного пространства Лобачевского.

Переменные  $r$ ,  $\chi$  и  $\eta$  зависят от  $t$  и  $x$ . Мера  $\sqrt{\gamma} = r$ , то есть в каждой точке пространства задана такая метрика, с компонентами, зависящими от времени. При этом преобразования координат сами некоммутативны, то есть не являются простыми сдвигами в отличие от калибровочных преобразований в электродинамике:

$$\delta_1 x^i = \xi_1^i(x); \quad \delta_2 x^i = \xi_2^i(x); \quad (\delta_2 \delta_1 - \delta_1 \delta_2) x^i = (\xi_1^j \xi_{2,j}^i - \xi_2^j \xi_{1,j}^i) \neq 0.$$

Динамическое пространство метрик есть фактор-пространство прямого произведения искривленных пространств метрик в каждой точке по некоммутативной группе координатных преобразований.

Все это говорит о том, что, видимо, квантовая теория гравитации может строиться лишь на основе некоторой техники бесконечно малых деформаций пространств.

Таким образом, построение квантовой теории гравитации ставит множество чисто математических вопросов. Мы находимся еще в самой начальной стадии построения такой теории.

## Глава 8

# Проблема начальных данных

Обыкновенное дифференциальное уравнение  $k$ -го порядка имеет  $k$  констант интегрирования, и для постановки задачи Коши нужно задать в начальный момент  $k$  величин: функцию и ее производные вплоть до  $k - 1$ -й.

В динамике полные начальные данные для систем с  $n$  степенями свободы, описываемых системой  $n$  дифференциальных уравнений второго порядка, нужно задать  $2n$  начальных значений —  $n$  координат и  $n$  скоростей или импульсов.

Дифференциальные уравнения в частных производных имеют бесконечное множество констант интегрирования — функции. Как определить степени свободы функций? Как задавать начальные условия для систем дифференциальных уравнений, особенно, если имеются калибровочные степени свободы или тождества? Эти вопросы являются областью изучения  $l$ -анализа.

### 9.1 $l$ -анализ

Идея  $l$ -анализа была выдвинута Уиттекером в 1906 году при построении сферических функций [16].

## 9.2 Гармонические полиномы

Связь координат точки в декартовой и сферической системах координат

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi; \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi; \quad z = r \cos \vartheta$$

для однородных полиномов декартовых координат степени  $l$  приводит к общему множителю  $r^l$ , умножаемого на функции только угловых переменных:

$$\sum_{k+m \leq l} C_{km}^l x^k y^m z^{l-k-m} = r^l Y(\vartheta, \varphi).$$

Число коэффициентов  $C_{km}^l$

$$N_3^l = \frac{(l+1)(l+2)}{2} \quad (9.1)$$

мы выведем ниже.

Оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

понижает степень однородного полинома на 2, и если нас интересуют гармонические полиномы степени  $l$ , на  $N_3^l$  коэффициентов накладывается  $N_3^{l-2}$  уравнений, так что произвольными остаются

$$N_3^l - N_3^{l-2} = \frac{(l+1)(l+2)}{2} - \frac{(l-1)l}{2} = 2l+1$$

коэффициентов. Пространство гармонических полиномов степени  $l$  имеет размерность  $2l+1$ . Гармоническая функция ( $\Delta f = 0$ ) имеет вид:

$$f = r^l \sum_m C_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi),$$

где  $m$  пробегает  $2l+1$  различных значений (например, от  $-l$  до  $+l$ ), а  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  – набор  $2l+1$  линейно независимых функций угловых переменных – сферические функции порядка  $l$ .

Таким же образом можно вычислить число сферических функций порядка  $l$  в четырехмерном пространстве

$$N_4^l - N_4^{l-2} = (l+1)^2,$$

в пятимерном пространстве

$$N_5^l - N_5^{l-2} = \frac{(l+1)(l+2)(2l+3)}{6}.$$

Эту идею Уиттекера можно обобщить на системы функций, подчиняющихся системе дифференциальных уравнений не обязательно линейных, а также на системы функций, имеющих *калибровочные степени свободы* [18]. Её пытался применить Эйнштейн в своих последних работах (в соавторстве с Б. Кауфман) [17] при анализе “жесткости” своей релятивистской теории несимметричного поля. Подчеркивая важность такого подхода для анализа сложных систем, Эйнштейн не успел дать его систематическое изложение.

### 9.3 l-представление

Пространство множества функций  $n$  переменных бесконечномерно и суть  $l$ -анализа состоит в разбиении этого бесконечномерного пространства на бесконечное количество конечномерных  $l$ -секторов, в каждом из которых группируются члены разложения суммарной  $l$ -й степени по переменным. В одномерном случае в каждом  $l$ -секторе находится 1 коэффициент:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots,$$

и это можно отразить разложением по степеням формального параметра  $t$  функции

$$F_1(t) = \frac{1}{1-t} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l = \sum_{l=0}^{\infty} N_1^l t^l,$$

имеющей при каждой степени  $t$  коэффициент единица ( $N_1^l = 1$ ). В случае нескольких переменных, если нас интересует лишь суммарная

степень по всем переменным, такие функции нужно перемножить:

$$F_n(t) = \frac{1}{(1-t)^n} = \sum_{l=0}^{\infty} N_n^l t^l, \quad (9.2)$$

где  $N_n^l$  обозначает число коэффициентов функции  $n$  переменных в  $l$ -секторе. Эта функция хорошо изучена в комбинаторике

$$N_n^l = \frac{(n+l-1)!}{(n-1)!l!}. \quad (9.3)$$

Приведем ее вид для низких размерностей пространства переменных:

$$N_1^l = 1; \quad N_2^l = l+1; \quad N_3^l = \frac{(l+1)(l+2)}{2}; \quad (9.4)$$

$$N_4^l = \frac{(l+1)(l+2)(l+3)}{6}.$$

Степень по  $l$  связана с числом переменных, которых на единицу больше, чем максимальная степень.

Определение этой функции через (9.2) дает ряд теорем сложения для нее, не требующих ее явного вида:

$$F_n(t)F_m(t) = F_{n+m}(t).$$

В частности, при  $m = 1$  получается исключительно важное для дальнейшего соотношение

$$N_{n+1}^{l+1} = \sum_{s=0}^l N_n^s. \quad (9.5)$$

Другие тождества следуют из очевидного равенства:

$$\frac{(1-t)^m}{(1-t)^n} = \frac{1}{(1-t)^{n-m}},$$

откуда

$$\sum_{s=0}^m (-1)^s \frac{m!}{s!(m-s)!} N_n^{l-s} = N_{n-m}^l. \quad (9.6)$$

Например, при  $m = 1$ :

$$N_n^l - N_n^{l-1} = N_{n-1}^l,$$

а при  $m = n$ ,  $l > 0$

$$\sum_{s=0}^n (-1)^s \frac{n!}{s!(n-s)!} N_n^{l-s} = 0.$$

Если функция подчиняется дифференциальному уравнению порядка  $k$ , то  $k$ -кратное дифференцирование переводит коэффициенты из сектора  $l$  в сектор  $l - k$  и на количество коэффициентов в этом секторе уменьшает число коэффициентов в секторе  $l$ .

Если функция имеет калибровочные степени свободы  $k$ -го порядка (функция изменяется  $k$ -ми производными калибровочной функции), то число коэффициентов в секторе  $l$  уменьшается на число коэффициентов калибровочной функции в секторе  $l + k$ . Это и есть основные правила использования  $l$ -анализа в системах дифференциальных уравнений с калибровочными степенями свободы.

## 9.4 Динамика скалярного поля

Продemonстрируем использование  $l$ -анализа в описании лагранжевой динамики полей. Пусть, например, имеется скалярное поле в  $n$ -мерном пространстве, зависящее еще от времени ( $N_{n+1}^l$  компонент в  $l$ -секторе) с лагранжианом, содержащим первые производные. Варьируя лагранжиан, получаем на это поле дифференциальное уравнение второго порядка, уменьшающее число компонент в  $l$ -секторе на  $N_{n+1}^{l-2}$ . В  $l$ -секторе остается

$$N_{scal}^l = N_{n+1}^l - N_{n+1}^{l-2}$$

компонент. Если сюда добавить и отнять  $N_{n+1}^{l-1}$ , то структура

$$N_{scal}^l = (N_{n+1}^l - N_{n+1}^{l-1}) + (N_{n+1}^{l-1} - N_{n+1}^{l-2}) = N_n^l + N_n^{l-1}$$

приобретает вид двух полей (исходное поле – сектор  $l$  и производные по времени – сектор  $l - 1$ ).

Наличие калибровочных преобразований (первого порядка) уменьшает число компонент исходного поля и добавляет тождества первого порядка на уравнения. Если уравнения второго порядка, то тождества по отношению к полю имеют третий порядок.

Классическим полем с калибровочной степенью свободы является электромагнитное поле.

## 9.5 Электродинамика

В теории поля все компоненты полей зависят от четырех переменных – трех пространственных координат и времени ( $n = 4$ ).

Электромагнитные поля описываются 4-векторным потенциалом, однако при наличии калибровочной степени свободы  $\delta A_\alpha = \partial_\alpha \chi$ . При этом калибровочном преобразовании часть коэффициентов потенциалов в  $l$ -м секторе может быть уничтожена коэффициентами из  $l + 1$ -го сектора калибровочной функции  $\chi$ , так что калибровочно независимых коэффициентов остается

$$n_l = 4 N_4^l - N_4^{l+1} = 4 \frac{(l+1)(l+2)(l+3)}{6} - \frac{(l+2)(l+3)(l+4)}{6} =$$

$$\frac{(l+2)(l+3)(4l+4-l-4)}{6} = \frac{l(l+2)(l+3)}{2}.$$

При  $l = 0$  все коэффициенты калибровочно устранимы – векторный потенциал локально не наблюдаем.

При  $l = 1$  (первые производные потенциала) имеется 6 неустраиваемых коэффициентов – это компоненты векторов напряженностей электромагнитного поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Однако они не являются свободными полями, на них накладывается:

$$6 N_4^{l-1} - n^l = 6 \frac{l(l+1)(l+2)}{6} - \frac{l(l+2)(l+3)}{2} = \frac{(l-1)l(l+2)}{2}$$

ограничений. При  $l = 2$  (первые производные от  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ ) их четыре – это первая пара уравнений Максвелла. Динамические уравнения Максвелла (вторая пара) – дифференциальные уравнения 2-го порядка по потенциалам и первого порядка по напряженностям. Они получаются вариацией действия по четырём потенциалам. Вариация действия по калибровочной функции приводит к дифференциальному первому порядку тождеству на эти уравнения ( $\dot{\rho} + \mathbf{div} \mathbf{J} = 0$ ), так что уравнения с тождеством дают

$$e_{q_l} = 4 N_4^{l-2} - N_4^{l-3} = 4 \frac{(l-1)l(l+1)}{6} - \frac{(l-2)(l-1)l}{6} =$$

$$\frac{(l-1)l(4l+4-l+2)}{6} = \frac{(l-1)l(l+2)}{2}.$$

Вторая пара уравнений Максвелла совпадает по  $l$ -структуре с первой.

Отсюда можно вычислить  $l$ -структуру начальных данных Коши в электродинамике:

$$k_l = n_l - eq_l = \frac{l(l+2)(l+3)}{2} - \frac{(l-1)l(l+2)}{2} = \frac{l(l+2)(l+3-l+1)}{2} = 2l(l+2).$$

Степень  $l$  равна уменьшенной на единицу размерности пространства, следовательно, начальные данные задаются в трехмерном пространстве. Низшая степень  $l = 1$ , при которой имеется 6 коэффициентов – компоненты полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в данной точке. Однако они не являются свободными (в начальных данных):

$$6 \frac{l(l+1)}{2} - 2l(l+2) = l(3l+3-2l-4) = l(l-1) = 2 \frac{(l-1)l}{2}.$$

Это два свободных (без тождеств) дифференциальных уравнения:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho,$$

где  $\rho$  – заданная в пространстве функция.

## 9.6 Риманова геометрия

Одной из важнейших областей применения  $l$ -анализа является риманова геометрия. Метрика  $n$ -мерного риманова пространства имеет  $n(n+1)/2$  компонент, но ее исходная  $l$ -структура  $n(n+1)/2 N_n^l$  редуцируется производными от  $n$  функций преобразований координат:

$$M_n^l = \frac{n(n+1)}{2} \frac{(n+l-1)!}{(n-1)! l!} - n \frac{(n+l)!}{(n-1)! (l+1)!} = \frac{n(l-1)(n+l-1)!}{2(n-2)! (l+1)!}.$$

В отличие от электродинамики здесь в нуль обращается число коэффициентов при  $l = 1$  – *первые производные метрического тензора в*

точке полностью устранимы координатным преобразованием. Это важнейший результат, позволяющий ввести локально декартову систему координат в окрестности любой наперед заданной точки.

При  $l = 0$  результат отрицательный:  $M_n^0 = -n(n-1)/2$ . Преобразований в нулевом секторе больше, чем компонент метрики. Они позволяют привести метрику к некоторому стандартному виду (единичная матрица – локально декартова система координат), при этом остается локальная группа преобразований, не меняющих метрику –  $n(n-1)/2$ -параметрическая группа локальных вращений.

Первые неустраимые компоненты появляются при  $l = 2$  – вторые производные метрического тензора. Их

$$M_n^2 = \frac{n^2(n^2 - 1)}{12}. \quad (9.7)$$

Это число независимых компонент тензора кривизны. В одномерном пространстве их нет – все одномерные пространства плоские. В двумерном пространстве имеется всего одна компонента – тензор Римана - Кристоффеля, тензор Риччи – все они выражаются через скалярную кривизну. В трехмерном пространстве компонент тензора кривизны шесть – как и у тензора Риччи, через который и выражаются все компоненты тензора кривизны (1.35). В четырехмерном пространстве компонент тензора кривизны 20, а тензора Риччи 10.

Свободная функция в  $n$ -мерном пространстве имеет  $N_n^1 = n$  первых производных – по числу переменных в пространстве. Однако производных тензора кривизны меньше на

$$B_n = n M_n^2 - M_n^3 = \frac{n^3(n^2 - 1)}{12} - \frac{(n-1)n^2(n+1)(n+2)}{24} = \frac{(n-2)(n-1)n^2(n+1)}{24}. \quad (9.8)$$

Это количество тождеств Бьянки в  $n$ -мерном пространстве:

$$R_{kl;m}^{ij} + R_{lm;k}^{ij} + R_{mk;l}^{ij} = 0. \quad (9.9)$$

В двумерном пространстве их нет – единственная компонента тензора Римана - Кристоффеля (скалярная кривизна) является свободной функцией. В трехмерном пространстве тождеств Бьянки три, и они все содержатся в тождествах Гильберта.

## 9.7 Динамика пространства в ТГВ

В теории глобального времени полевыми переменными являются шесть компонент метрического тензора и три компоненты поля абсолютных скоростей, зависящие от четырех переменных, то есть исходно имеется  $9 N_4^l$  компонент в каждом  $l$ -секторе. Однако эти поля могут изменяться тремя координатными преобразованиями, так что инвариантных комбинаций в каждом  $l$ -секторе

$$n_l = 9 N_4^l - 3 N_4^{l+1} = 9 \frac{(l+1)(l+2)(l+3)}{6} - 3 \frac{(l+2)(l+3)(l+4)}{6} = \frac{(l+2)(l+3)(2l+1)}{2}.$$

Вариация действия по этим девяти полям приводит к девяти дифференциальным уравнениям второго порядка, а наличие трех калибровочных преобразований приводит к трем дифференциальным тождествам среди этих уравнений уже третьего порядка, так что всего в  $l$ -м секторе имеется ограничений

$$eq_l = 9 N_4^{l-2} - 3 N_4^{l-3} = 9 \frac{(l-1)l(l+1)}{6} - 3 \frac{(l-2)(l-1)l}{6} = \frac{(l-1)l(2l+5)}{2}.$$

Поэтому произвол выбора остается для компонент, связанных уравнениями:

$$k_l = n_l - eq_l = \frac{(l+2)(l+3)(2l+1)}{2} - \frac{(l-1)l(2l+5)}{2} = 3(l^2 + 2l - 1)$$

компонент в  $l$ -м секторе.

Как и в предыдущих примерах, степень по  $l$  для компонент, связанных уравнениями, равна двум, что говорит о том, что эти компоненты задаются в трехмерном пространстве, а распространение решений на четыре переменные (развитие во времени) берут на себя уравнения. Число  $k_l$  и определяет  $l$ -структуру данных Коши в ТГВ.

При  $l = 0$   $k_0 = -3$ , что говорит об уже обсуждавшемся факте: координатными преобразованиями метрический тензор в одной точке может быть приведен к единичной матрице и еще остаются локальные вращения, не меняющие метрики.

При  $l = 1$   $k_1 = 6$ . Однако это не все динамические переменные:

$$k_l - 6 N_3^{l-1} = 3(l^2 + 2l - 1) - 6 \frac{l(l+1)}{2} = 3(l-1).$$

Это три свободные функции в двумерном пространстве (на границе рассматриваемой области), образованные из вторых производных динамических полей.

$l$ -анализ не указывает, что это за конструкции, он инвариантен к тому или иному представлению полей. Что это за данные, видно из уравнений поля: с помощью преобразования трехмерных координат в какой-то момент времени можно привести метрику, например, к диагональному виду. Для поддержания такого вида метрики и в последующем приходится проводить преобразования координат, зависящие от времени, то есть с неизбежностью возникает поле абсолютных скоростей: в общем случае диагонализировать метрику с течением времени в инерциальной системе (где координаты точек пространства с течением времени не меняются) невозможно. Тогда в качестве динамических переменных выступают три компонента диагонализированной метрики и их производные по времени – шесть функций в трехмерном пространстве.

Уравнения связей являются дифференциальными уравнениями второго порядка на поле скоростей в пространстве, не содержат производных по времени. Поэтому для нахождения поля скоростей нужно задать их на границе рассматриваемой области. Если трехмерное пространство компактно, замкнуто – граница отсутствует, – эти дополнительные степени свободы исчезают.

## 9.8 Динамическая структура ОТО

Динамическая структура ОТО существенно отлична. Полевыми переменными являются 10 компонент метрического тензора четырехмерного пространства - времени, а в качестве калибровочного поля выступают четыре четырехмерных преобразований координат, оставляя инвариантных переменных

$$n_g = 10 N_4^l - 4 N_4^{l+1} = (l-1)(l+2)(l+3).$$

Уравнений Эйнштейна 10, но на них наложены четыре тождества Гильберта, так что в целом связей на динамические компоненты

$$eq_g = 10 N_4^{l-2} - 4 N_4^{l-3} = (l-1)l(l+3).$$

Данные Коши имеют структуру

$$k_g = n_g - eq_g = 2(l-1)(l+3).$$

Это также функции трех переменных (степень по  $l$  равна двум). В отличие от ТГВ нетривиальными оказываются компоненты, образованные из вторых производных четырехмерного метрического тензора. Их (при  $l = 2$ ) имеется 10. Однако эти функции не свободны:

$$10 \frac{(l-1)l}{2} - 3(l-1)(l+3) = 3(l-2)(l-1) = 6 \frac{(l-2)(l-1)}{2},$$

то есть

$$k_g = 10 \frac{(l-1)l}{2} - 6 \frac{(l-2)(l-1)}{2}.$$

На эти 10 функций наложены 6 дифференциальных уравнений первого порядка.

В отличие от ТГВ в ОТО данные Коши (в заданный момент времени) подчиняются еще шести дифференциальным уравнениям первого порядка, которые необходимо решить для однозначного описания динамики.

## Глава 00

# Аналитические вычисления

В конце XX века в связи с компьютерной революцией появились системы аналитических вычислений, позволяющие переложить на компьютеры существенную часть вычисления сложных выражений. Это, прежде всего, системы Reduce, Derive, Form. В последнее время большую популярность приобрели системы Maple, MathLab, но особенно большое распространение во всем мире приобрела система Mathematica, созданная физиком-теоретиком Стефеном Вольфрамом.

Вычисление в римановой геометрии связностей, тензора кривизны, в ТГВ – ковариантных производных по времени, – будучи в принципе не сложными, требуют вычисления и суммирования большого числа различных компонент, и проведение этой работы с проверкой правильности результата требует достаточно много времени. Эта рутинная работа при проведении ее вручную отвлекает внимание от физической сути изучаемого объекта. Автоматизация вычислений позволяет не только ускорить их, но и просмотреть множество вариантов, выбрать удобные координаты, общий вид метрики и т.д.

Здесь мы не будем приводить какие-либо основы работы с этим пакетом, порекомендуем лишь наряду с оригиналом [19] очень содержательную книгу [20], а также пособие [21]. А далее будем вести изложение, полагая, что читатель владеет необходимыми основами.

Мы приведем модули для работы с римановыми пространствами (в основном, трехмерными) и векторными полями в них, а также модуль получения уравнений ТГВ.

## 10.1 Риманова геометрия

### 10.1.1 Модуль Ricci

Модуль Ricci вычисляет тензор Риччи трехмерного пространства по заданной метрике. Приводим его комментированный текст на языке Mathematica.

Комментарии даются внутри скобок со звездочками:

(\* Комментарий \*)

Их наличие или отсутствие не влияет на работу модуля, однако они позволяют понять его структуру.

```
Ricci[coords_, mtr_] := Module[{DG, ss, zz, cs1},
  (* Считывание обозначений координат *)
  Do[x[i] = coords[[i]], {i, 3}];

  (* Вычисление корня из детерминанта gd *)
  DG = Det[mtr] // Simplify;
  ss = Solve[zz^2 == DG, zz];
  gd = zz /. ss[[2]];

  (* Обратный метрический тензор  $g^{ij}=hh[i,j]$  *)
  HH = Inverse[mtr];
  Do[Do[hh[i,j]=HH[[i,j]];gg[i,j]=mtr[[i,j]],{j,3}],{i,3}];

  (* Вычисление связностей  $\Gamma^i_{jk}=cs2[i,j,k]$  *)
  Do[Do[Do[cs1[i,j,k]=D[gg[i,j],x[k]]+D[gg[i,k],x[j]] -
    D[gg[j,k],x[i]]//Simplify,{k,3}},{j,3}],{i,3}];
  Do[Do[Do[cs2[i,j,k]=Sum[hh[i,s] cs1[s,j,k]/2,{s,3}]
    // Simplify,{k, 3}], {j, 3}], {i, 3}];

  (* Свертка  $\Gamma^j_{ij}=cs[i]$  *)
```

```

Do[cs[i]=Sum[cs2[j,i,j],{j,3}]/Simplify, {i,3}];

(* Вычисление тензора Риччи R_{ij}=ricci[i,j] *)
Do[Do[ricci[i, j]=
Sum[D[cs2[k,i,j],x[k]],{k,3}]-D[cs[i], x[j]] +
Sum[Sum[cs2[k,i,j]cs2[l, k, l]-cs2[k,l,i]cs2[l,k,j]//
Simplify,{l,3}], {k,3}], {j,3}], {i,3}];

(* Подъем индекса у тензора Риччи R^i_j=ric[i,j] *)
Do[Do[ric[i,j] = Sum[hh[i, s]ricci[s,j] //
Simplify, {s, 3}], {j, 3}], {i,3}];

(* Скалярная кривизна rs *)
rs = Sum[ric[i, i], {i, 3}];

(* Сборка тензора Риччи в матрицу (R^i_j)=Rij[[i,j]] *)
Rij = Array[ric, {3, 3}]/Simplify
(* Эта матрица и выводится как результат работы модуля *)
] (* Конец модуля *)

```

Для получения геометрических характеристик риманова пространства нужно задать наименования координат и метрический тензор в зависимости от них. После работы модуля выводится тензор Риччи для заданной метрики.

Для решения различных задач модуль Ricci достаточно запустить один раз, меняя лишь входные данные. Модуль лучше держать в отдельном файле, который после запуска модуля можно закрыть.

В Mathematic'e есть механизм *пакетов расширения*, однако пакет скрывает результаты всех промежуточных вычислений. При запуске модуля на глобальном уровне (просто из файла) мы можем после его выполнения для заданной метрики посмотреть:

- корень из детерминанта  $\sqrt{\gamma} = gd$ ;
- обратный метрический тензор  $\gamma^{ij} = hh[i, j]$ , либо в виде матрицы HH;
- связности  $\Gamma_{jk}^i = cs2[i, j, k]$ ;
- скалярную кривизну  $R = rs$ .

### 10.1.2 Сферические координаты в евклидовом пространстве

Метрика евклидова пространства в сферической системе координат

$$dl^2 = dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

Компоненты метрического тензора зависят от координат, однако тензор кривизны и тензор Риччи должны быть равны нулю.

(\* Определяем метрический тензор \*)

```
GG={{1,0,0},{0,r^2,0},{0,0,r^2 Sin[u]^2}}
```

(\* Проверяем его правильность \*)

```
GG // MatrixForm
```

(\* Обращаемся к модулю Ricci, \*)

(\* указывая координаты и метрический тензор \*)

```
Ricci[{r, u, w}, GG] // Simplify
```

Действительно, результат работы программы

$$\{\{0, 0, 0\}, \{0, 0, 0\}, \{0, 0, 0\}\}$$

говорит о том, что пространство плоское.

Однако и в этом случае модуль может быть полезен, например, для вычисления связностей в сферической системе координат:

```
Array[cs2, {3, 3, 3}]
```

### 10.1.3 Трехмерная сфера

Трехмерная сфера радиуса  $r$  в сферических координатах

$$dl^2 = r^2 (du^2 + \sin^2 u (dv^2 + \sin^2 v dw^2)).$$

```
(* Определяем метрический тензор *)
Do[Do[gg[i, j] = 0, {j, 3}], {i, 3}];
gg[1, 1] = r^2;
gg[2, 2] = r^2 Sin[u]^2;
gg[3, 3] = r^2 Sin[u]^2 Sin[v]^2;

(* Проверяем его правильность *)
GG = Array[gg, {3, 3}];
GG // MatrixForm

(* Обращаемся к модулю Ricci, *)
(* указывая координаты и метрический тензор *)
Ricci[{u, v, w}, GG]
```

Результат можно представить в виде матрицы

```
%//MatrixForm
```

Интересно также посмотреть скалярную кривизну, вызвав переменную *rs*.

#### 10.1.4 Трехмерная сфера в конформных координатах

Трехмерная сфера радиуса  $r$  в стереографической проекции на трехмерное евклидово пространство – в конформных координатах

$$dl^2 = (dx^2 + dy^2 + dz^2)/f^2; \quad f = 1 + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4r^2}.$$

В пакете “Mathematica”:

```
f = 1 + (x^2 + y^2 + z^2)/(4r^2)
GG = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}/f^2

(* Проверяем его правильность *)

GG // MatrixForm

(* Обращаемся к модулю Ricci, *)
(* указывая координаты и метрический тензор *)
Ricci[{x, y, z}, GG]
```

### 10.1.5 Трехмерная сфера в углах Эйлера

Трехмерная сфера радиуса  $r$  в углах Эйлера  $\{\vartheta, \varphi, \psi\}$ :

$$dl^2 = \frac{r^2}{4} (d\vartheta^2 + d\varphi^2 + d\psi^2 + 2 \cos \vartheta d\varphi d\psi)$$

В пакете “Mathematica”:

```
(* Определяем метрический тензор *)
Do[Do[gg[i, j] = 0, {j, 3}], {i, 3}];
gg[1, 1] = r^2/4;
gg[2, 2] = r^2/4;
gg[3, 3] = r^2/4;
gg[2, 3] = r^2Cos[tt]/4;
gg[3, 2] = r^2Cos[tt]/4;

(* Проверяем его правильность *)

GG // MatrixForm

(* Обращаемся к модулю Ricci, *)
(* указывая координаты и метрический тензор *)
Ricci[{tt, u, w}, GG] // Simplify
```

Здесь интересно посмотреть обратный метрический тензор:

```
HH//MatrixForm
```

Во всех трех последних примерах результат работы модуля Ricci – список компонент тензора Риччи сферы радиуса  $r$  – одинаков:

$$\left\{ \left\{ \frac{2}{r^2}, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, \frac{2}{r^2}, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, \frac{2}{r^2} \right\} \right\}.$$

Это говорит о том, что во всех трех случаях описывается сфера в различных координатах.

### 10.1.6 Пространства отрицательной кривизны

Трёхмерная псевдосфера (пространство постоянной отрицательной кривизны) в угловых координатах получается из метрики обычной сферы заменой синуса угла вдоль меридиана на гиперболический синус:

```
Do[Do[gg[i, j] = 0, {j, 3}], {i, 3}];
gg[1, 1] = r^2;
gg[2, 2] = r^2 Sinh[u]^2;
gg[3, 3] = r^2 Sinh[u]^2 Sin[v]^2;
GG = Array[gg, {3, 3}];
GG // MatrixForm
Ricci[{u, v, w}, GG]
```

$$\left\{ \left\{ -\frac{2}{r^2}, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, -\frac{2}{r^2}, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, -\frac{2}{r^2} \right\} \right\}.$$

В конформных координатах Клейна метрика псевдосферы имеет почти такой же вид, как и у обычной сферы с заменой  $r^2$  на  $-r^2$ :

$$dl^2 = (dx^2 + dy^2 + dz^2)/f^2; \quad f = 1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4r^2}.$$

$$f = 1 - (x^2 + y^2 + z^2)/(4r^2)$$

$$GG = \left\{ \left\{ 1, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, 1, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, 1 \right\} \right\} / f^2$$

(\* Проверяем его правильность \*)

```
GG // MatrixForm
```

(\* Обращаемся к модулю Ricci, \*)

(\* указывая координаты и метрический тензор \*)

```
Ricci[{x, y, z}, GG]
```

Результат

$$\left\{ \left\{ -\frac{2}{r^2}, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, -\frac{2}{r^2}, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, -\frac{2}{r^2} \right\} \right\},$$

как и в предыдущем примере.

### 10.1.7 Двумерные поверхности

Модуль Ricci можно использовать и для определения характеристик кривизны двумерных поверхностей, записав их метрику как часть метрики трехмерного пространства – прямого произведения данной двумерной поверхности на прямую.

```
Do[Do[gg[i, j] = 0, {j, 3}], {i, 3}];
f = a^2 + x^2 + y^2
gg[1, 1] = (a^2 + y^2)/f
gg[2, 2] = (a^2 + x^2)/f
gg[1, 2] = -x y/f
gg[2, 1] = -x y/f
gg[3, 3] = 1
GG = Array[gg, {3, 3}];
GG // MatrixForm
Ricci[{x, y, z}, GG] // Simplify
% // Simplify
```

Что это за поверхность?

## 10.2 Работа с векторными полями

Важную роль в физике играет не только метрический тензор, но и векторные поля, прежде всего – поле абсолютной скорости, а также поля Киллинга, геодезические потоки и др. Мы приводим ряд модулей для работы с векторными полями, но при необходимости они могут быть легко модифицированы для вычисления каких-то других характеристик векторных или тензорных полей.

Перед запуском векторных модулей нужно задать метрику и запустить модуль Ricci, чтобы задать координаты и вычислить необходимые геометрические характеристики.

Модуль Killing вычисляет уравнения Киллинга (2.13), точнее Ли-вариации метрического тензора по векторному полю Vels (2.8):

```
Killing[Vels_] := Module[{DG, ss},
  Do[Do[
    kil[i, j] =
      Sum[D[Vels[[s]], x[i]] gg[s, j] + D[Vels[[s]], x[j]] gg[i, s] +
```

```

      Vels[[s]]D[gg[i, j], x[s]],
      {s, 3}], {j, 3}], {i, 3}];
Array[kil, {3, 3}] // Simplify
]

```

Модуль `Commut` вычисляет Ли-коммутатор двух векторных полей (2.11):

```

Commut[vel1_, vel2_] :=
Module[{},
  Do[com[i] =
    Sum[vel1[[s]]D[vel2[[i]], x[s]] - vel2[[s]]D[vel1[[i]], x[s]],
      {s, 1, 3}], {i, 1, 3}] // Simplify;
Array[com, 3] // Simplify
]

```

Модуль `CovDif` вычисляет ковариантную производную векторного поля `Vels`:

```

CovDif[Vels_] := Module[{DG, ss},
  Do[Do[cov[i, j] = D[Vels[[i]], x[j]] + Sum[cs2[i, j, k] Vels[[k]],
    {k, 3}], {j, 3}], {i, 3}];
Array[cov, {3, 3}] // Simplify
]

```

Модуль `Geodes` проверяет, не является ли векторное поле `Field` геодезическим потоком:

```

Geodes[Field_] := Module[{DG, ss},
  Do[zz[i] =
    Sum[Field[[k]](D[Field[[i]], x[k]] +
      Sum[cs2[i, j, k] Field[[j]], {j, 3}], {k, 3}] //
    Simplify, {i, 3}];
ZZ = Array[zz, 3]
]

```

Следующий модуль вычисляет дивергенцию векторного поля `V`

```

Div[V_] := Module[{},
  Sum[D[V[[i]] gd, x[i]], {i, 3}]/gd // Simplify
]

```

Далее можно вычислить ротор векторного поля

```

Rot[V_] := Module[{v1},
  Do[v1[i] = Sum[gg[i, j]V[[j]], {j, 3}], {i, 3}];
  rr[1] = (D[v1[2],x[3]]-D[v1[3],x[2]])/gd//Simplify;
  rr[2] = (D[v1[3],x[1]]-D[v1[1],x[3]])/gd//Simplify;
  rr[3] = (D[v1[1],x[2]]-D[v1[2],x[1]])/gd//Simplify;
  Array[rr, 3]
]

```

Здесь вычисляется векторное произведение двух векторных полей:

```

Pr[V1_, V2_] := Module[{l1, l2, rr},
  Do[l1[i] = Sum[gg[i, j]V1[[j]], {j, 3}], {i, 3}];
  Do[l2[i] = Sum[gg[i, j]V2[[j]], {j, 3}], {i, 3}];
  rr[1] = (l1[2]l2[3] - l1[3]l2[2])/gd // Simplify;
  rr[2] = (l1[3]l2[1] - l1[1]l2[3])/gd // Simplify;
  rr[3] = (l1[1]l2[2] - l1[2]l2[1])/gd // Simplify;
  Array[rr, 3]
]

```

Здесь вычисляется скалярное произведение двух векторных полей:

```

Scal[V1_, V2_] := Module[{},
  Sum[Sum[gg[i, j]V1[[i]]V2[[j]], {j, 3}], {i, 3}]/Simplify
]

```

Использование этих модулей достаточно очевидно, но перед их использованием каждый модуль должен быть запущен.

## 10.3 Теория глобального времени

Вычисление уравнений ТГВ осуществляется модулем Glob.

### 10.3.1 Модуль Glob

Модуль Glob предназначен для составления уравнений связи и динамики пространства в теории глобального времени.

Первая часть этого модуля повторяет содержимое модуля Ricci. Однако в заголовке модуля к формальным параметрам добавлено поле абсолютных скоростей – список  $\{V^1[x], V^2[x], V^3[x]\}$  с указанием зависимости компонент от координат.

```
Glob[coords_, GlobalVel_, mtr_] := Module[{DG, ss, zz, cs1},
  (* Считывание обозначений координат *)
  Do[x[i] = coords[[i]], {i, 3}];

  (* Вычисление корня из детерминанта gd *)
  DG = Det[mtr] // Simplify;
  ss = Solve[zz^2 == DG, zz];
  gd = zz /. ss[[2]];

  (* Обратный метрический тензор g^{ij}=hh[i,j] *)
  HH = Inverse[mtr];
  Do[Do[hh[i,j]=HH[[i,j]];gg[i,j]=mtr[[i,j]],{j,3}],{i,3}];

  (* Вычисление связностей \Gamma^i_{jk}=cs2[i,j,k] *)
  Do[Do[Do[cs1[i,j,k] = D[gg[i,j],x[k]]+D[gg[i,k],x[j]]-
    D[gg[j,k],x[i]]//Simplify,{k,3}},{j,3}],{i,3}];
  Do[Do[Do[cs2[i,j,k]=Sum[hh[i,s] cs1[s,j,k]/2,{s,3}]
    // Simplify,{k, 3}], {j, 3}], {i, 3}];

  (* Свертка Gamma^j_{ij}=cs[i] *)
  Do[cs[i]=Sum[cs2[j,i,j],{j,3}]/Simplify,{i,3}];

  (* Вычисление тензора Риччи R_{ij}=ricci[i,j] *)
  Do[Do[ricci[i, j]=
    Sum[D[cs2[k,i,j],x[k]],{k,3}]-D[cs[i],x[j]]+
```

```

Sum[Sum[cs2[k,i,j]cs2[l,k,l]-cs2[k,l,i]cs2[l,k,j]]//
Simplify, {l, 3}], {k, 3}], {j, 3}], {i, 3}];

(* Подъем индекса у тензора Риччи R^i_j=ric[i,j] *)
Do[Do[ric[i, j] = Sum[hh[i, s]ricci[s, j] //
Simplify, {s, 3}], {j, 3}], {i, 3}];

(* Скалярная кривизна rs *)
rs = Sum[ric[i, i], {i, 3}];
(=====*)
(* Уравнения связей и динамики пространства *)

(* Скорости деформации mu_{ij}=mu[i,j] *)
Do[Do[mu[i, j] = (D[gg[i, j], t] +
Sum[(gg[s, j]D[GlobalVel[[s]], x[i]] +
gg[i, s]D[GlobalVel[[s]], x[j]] +
GlobalVel[[s]]D[gg[i, j], x[s]])],
{s, 3}])/2 // Simplify, {j, 3}], {i, 3}];

(* Поднятие индекса mu^i_j=muh[i,j] *)
Do[Do[muh[i, j]=Sum[hh[i, s]mu[s, j], {s, 3}], {j, 3}], {i, 3}];

(* Свертка mu^i_i=ms;
ms = Sum[muh[s, s], {s, 3}] // Simplify;

(* Плотности импульсов pi^i_j=pi[i,j] *)
Do[Do[pi[i, j]=(muh[i, j]-If[i==j, ms, 0])gd/2//
Simplify, {j, 3}], {i, 3}];

(* Уравнения связей \pi^j_{i;j}=links[i] *)
Do[lnks[i]=Sum[D[pi[j, i], x[j]]-Sum[pi[j, k]cs2[k, i, j], {k, 3}]
// Simplify, {j, 3}], {i, 3}];

(* Плотность кинетической энергии *)
Ekin=Sum[Sum[pi[i, j]muh[j, i], {j, 3}], {i, 3}]/Simplify;

(* Вклад кинетической энергии в динамические уравнения *)
Do[Do[q[i, j]=D[pi[i, j], t]+Sum[D[GlobalVel[[s]]pi[i, j], x[s]]+
pi[i, s]D[GlobalVel[[s]], x[j]] -

```

```

pi[s,j]D[GlobalVel[[i]], x[s]], {s, 3}] -
If[i==j, Ekin/2,0]//Simplify, {j,3}], {i,3}];

(* Динамические уравнения eqs[i,j] *)
Do[Do[eqs[i, j] =
  2q[i,j]+(ric[i,j]-If[i==j, rs/2, 0])gd//Simplify,
  {j,3}], {i, 3}];

(* Гамильтониан H *)
H=2 Sum[Sum[muh[i,j]pi[j,i],{i,3}],{j,3}]-LL//Simplify;

(* Лагранжиан LL *)
LL = Ekin + rs gd/2 // Simplify
] (* Конец модуля *)

```

Как результат работы модуля выводится лагранжиан (результат работы последнего оператора).

### 10.3.2 Vortex

Здесь мы приведем в качестве примера получение уравнений для космических вихрей (4.10). Переменную  $\vartheta$  мы обозначаем идентификатором  $tt$ , а  $\varphi$  —  $fi$ .

```

Do[Do[gg[i, j] = 0, {j, 3}], {i, 3}]
W = E^w[r, tt];
gg[1, 1] = W;
gg[2, 2] = W r^2;
gg[3, 3] = r^2 Sin[tt]^2;
GG = Array[gg, {3, 3}];
GG // MatrixForm

Glob[{r, tt, fi}, {0, 0, V[r, tt]}, GG]

```

Как непосредственный результат работы модуля выдается лагранжиан LL.

Выведем уравнения связей (lnks) и динамики (eqs):

```

Lnk = Array[lnks, 3] // Simplify
Eq = Array[eqs, {3, 3}] // Simplify

```

```
z12 = eqs[1, 2] 2/r
z11 = 4 eqs[1, 1]
```

Комбинируя уравнения, находим производные метрической функции  $w[r, tt]$  по ее аргументам:

```
zz1 = 2z12 Cos[tt] + z11 Sin[tt] // Simplify
```

```
ss=Solve[zz1==0, ∂r w[r, tt]]
w1=∂r w[r, tt]/.ss //Simplify
```

```
zz2 = 2 z12 Sin[tt] - z11 Cos[tt] // Simplify
```

```
ss=Solve[zz2==0, ∂tt w[r, tt]]
w2=∂tt w[r, tt]/.ss //Simplify
```

Задавая различный вид метрики, а также поле абсолютных скоростей, с помощью модуля `Glob` находятся уравнения динамики и связи для различных физических задач ТГВ.

## Заключение

Теория глобального времени открыла для исследований новый физический объект – трехмерное пространство. Конечно, о пространстве люди задумывались с древнейших времен. Декарт понимал именно материальность пространства, однако понадобилось почти четыре столетия, чтобы идеи Декарта могли перейти из области рассуждений в область теоретической физики. Появление в конце XIX века теории римановых пространств на базе математического аппарата ковариантного дифференцирования привело к созданию общей теории относительности, в которой, однако, пространство как физический объект затерялось в четырехмерном многообразии.

Создание математического аппарата ковариантного дифференцирования по времени, изложенного в данной книге, позволило эпизоды четырехмерного пространства - времени развернуть в динамику пространства. Теперь, с точки зрения теоретической физики, пространство является динамическим полем, описываемым девятью полевыми переменными, с лагранжианом и ненулевым гамильтонианом, наподобие электромагнитного поля.

При этом многие проблемы, на которые в ОТО тратятся огромные математические и интеллектуальные средства: проблема начальных данных, проблема геодезической полноты, проблема каустик в решениях, проблема критической плотности, основания квантовой теории и пр., – в ТГВ становятся простыми или вообще отсутствуют.

В динамике Космоса громадные энергии, которые несут нетривиальные динамические конфигурации пространства, возможно, заменят “темную материю”, “скрытую энергию”, “гигантские черные дыры”.

Вырисовывается базис, на котором можно строить квантовую теорию и структуры статистической физики с учетом пространства как физического динамического поля.

# Литература

- [1] Riemann B. //Nachr. K. Ges. Wiss. Göttingen Bd. **13**, 133-152 (1868). [Перевод: Сб. ст. *Альберт Эйнштейн и теория гравитации*. М.: Мир, 1979, С. 18-33]. ([document](#))
- [2] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия*. М.: Наука, 1979. [5.6](#)
- [3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля*. М.: Наука, 1988. [2.5](#), [6.3.2](#), [6.6.2](#), [6.6.3](#)
- [4] Schutz W.F.. Phys. Rev. D, **4**, 3559-3566 (1971). [3.5.3](#)
- [5] Hilbert D., *Nachr. K. Ges. Wiss. Göttingen*. **3** 395 (1915) [Перевод: Сб. ст. *Альберт Эйнштейн и теория гравитации*. М.: Мир, 1979. С. 133-145] [3.4.6](#), [6.2](#)
- [6] Arrovitt R., Deser S., and Misner C.W. // Phys. Rev. **116**, 1322 (1959). [6.8](#)
- [7] Painlevé P. // C.R. Acad. Sci. (Paris). **173**, 677 (1921). [6.6.1](#)
- [8] Чандрасекар С. *Математическая теория черных дыр*. М.: Мир, 1986 [Chandrasekhar S., *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford Univ. Press, 1983]. [5.10.1](#)
- [9] Виленкин Н.Я. *Специальные функции и теория представления групп*. М.: Наука, 1965. [8.3](#)
- [10] Einstein A., Grossmann M. //Z. Math. und Phys. **62**, 225-261 (1913). [Перевод: Эйнштейн А. *Собрание научных трудов* Т. **1**, С. 227-266. М.: Наука, 1966]. [6.1](#)

- [11] Friedman A. // *Zs. Phys.* **10**, 376 (1922) [Перевод: Сб. ст. *Альберт Эйнштейн и теория гравитации*. М.: Мир, 1979. С. 320-329]. [6.4](#)
- [12] Misner C.W., Thorne K., Wheeler J.A. *Gravitation* (San Francisco: Freeman, 1974). [Перевод: Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. *Гравитация*. М.: Мир, 1977 ].
- [13] Фок В.А. *Теория пространства, времени и тяготения*. М.: ГИФМЛ, 1961.
- [14] Einstein A. // *Sitz. preuss. Akad. Wiss.* **1,1**, 154-167 (1918). [Перевод: Эйнштейн А. *Собрание научных трудов*. Т. **1**, с. 631-646 М.: Наука, 1966]. [7.5.2](#), [7.5.3](#)
- [15] Бурланков Д.Е. // *ЖЭТФ*, **51**. 842 (1966). [8.1](#)
- [16] Whittaker E.T. // *Math. Ann.*, LVII, 333. 1902; Whittaker E.T., Watson G.N. *A course of modern analysis*. Cambridge, 1927. [Перевод: Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н. *Курс современного анализа*. Т. 2, М., 1963]. [9.1](#)
- [17] Einstein A., Kaufman B. // *Ann. Math.* **62**, 128, 1955. [Перевод: Эйнштейн А. *Собрание научных трудов*. Т. **2**, С. 835. М.: Наука (1966)] [9.2](#)
- [18] Бурланков Д.Е. // *ТМФ*, **39**, 16, 1979. [9.2](#)
- [19] Wolfram S. *The Mathematica Book*. Third Edition. Mathematica Version 3. Cambridge University Press, 1998. [10](#)
- [20] Воробьев Е.М. *Введение в систему "Математика"*. М.: Финансы и статистика, 1998. [10](#)
- [21] Муравьев В.А., Бурланков Д.Е. *Практическое введение в пакет Mathematica*. Нижний Новгород: Изд. ННГУ, 2000. [10](#)